Über die Kurve der Ecken der Vierseite,

die von den gemeinsamen Tangenten eines festen Kegelschnitts und der Kegelschnitte eines Büschels gebildet werden.

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Fakultät

der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Heinz Egerer

aus Nürnberg.

ACAD. LIBR. HAT. BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 1. November 1906.

Borna-Leipzig

Buchdruckerei Robert Noske

1906.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542702_0103

§ 1.

Einleitung.

Die vorstehende Aufgabe stellt sich als eine Verallgemeinerung von speziellen Aufgaben dar, wie sie einmal unter dem Namen „Brennpunktskurven“ verschiedene deutsche und englische Mathematiker[1]) und andrerseits unter der dieser Schrift beigegebenen oder ähnlichen Bezeichnungen bis zum Jahr 1880 Redaktion und Lesepublikum der „Nouvelles annales de mathematiques“ interessierten[2]) und in jenem Jahr durch die Arbeit von Darboux ihren Abschluß und ihre zwar noch unvollständige, aber wenigstens verallgemeinerte, alle bisherigen Spezialfälle zusammenfassende Lösung fanden.

Darboux stellt sich die Aufgabe[3]): On considère une conique fixe S et des coniques variables passant par quatre points fixes A_1, A_2, A_3, A_4. On mène les tangentes communes à la conique fixe S et à l'une des coniques variables et l'on demande le lieu du point des concours de ces tangentes.

Seine Lösung ist:

$$(1) \qquad \pm D_1\sqrt{b_1} \mp D_2\sqrt{b_2} \pm D_3\sqrt{b_3} \mp D_4\sqrt{b_4} = 0,$$

---

[1]) Möbius, Ges. Werke Bd. 1 S. 587; Durège, Math. Annalen Bd. 5 S. 83; Sylvester, Phil. Mag. Vol. 31, Fourth Series, Mai 1866, p. 380; Cayley, Phil. Mag. Vol. 32, Coll. Math. Pap. Vol. 7 p. 1; Salmon-Fiedler; An. Geom. der Kegelschnitte Bd. 2 S. 520 u. 535; Bobek, Monatshefte f. Math. u. Phys. 1892 S. 309; Bauer, Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften Bd. 35 1905 Heft 1.

[2]) Nouv. Ann. de Math. I serie tome 10 1851 p. 408 (Chasles) II serie tome 2 1863 p. 481; II serie tome 3 1864 p. 49; II serie tome 12 1873 p. 23; II serie tome 19 1880 p. 91; II serie tome 19 1880 p. 122.

[3]) Nouv. Ann. de Math. II serie tome 19 1880 p. 184.

wenn

$$D_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$b_i = Q_i^2 - S_i S',$$

$$S' = c_{11} x^2 + 2 c_{12} xy + c_{22} y^2 + 2 c_{13} x + 2 c_{23} y + c_{33},$$

$$S_i = c_{11} x_i^2 + 2 c_{12} x_i y_i + c_{22} y_i^2 + 2 c_{13} x_i + 2 c_{23} y_i + c_{33},$$

$$Q_i = x(c_{11} x_i + c_{12} y_i + c_{13}) + y(c_{21} x_i + c_{22} y_i + c_{23}) + (c_{31} x_i + c_{32} y_i + c_{33}).$$

Rationalisiert erscheint die Gleichung zunächst vom Grad acht; nach den nachstehenden Bemerkungen muß sie S′ als Faktor haben; natürlich ergibt sich das auch nach leichter, wenn auch unübersichtlicher und umständlicher Rechnung analytisch. Wie hier, so ist auch für die fernere Untersuchung die Darboux'sche Form wenig geeignet.

Vor Anschreiben neuer Gleichungen noch eine kurze Bemerkung über die Ordnung der Kurve. Der feste Kegelschnitt S und ein variabler V_λ des Büschels $V - \lambda V'$ haben vier gemeinsame Tangenten, die sich jedesmal in sechs Punkten schneiden. Sei g eine dieser Tangenten, so schneiden die übrigen, etwa h, f, k genannt, auf ihr drei Kurvenpunkte aus. Nun gibt es aber noch einen zweiten Kegelschnitt des Büschels, der ebenfalls g berührt (falls das Büschel zugleich Schar ist, fallen beide zusammen — siehe dazu die Schlußbemerkungen dieses Paragraphen, sowie § 6) und mit dem festen wieder vier gemeinsame Tangenten $g' \equiv g$, h′, f′, k′ liefert und damit auf g drei weitere Kurvenpunkte ausschneiden läßt, im ganzen also sechs; soviel mindestens, aber auch höchstens, weil g immer und nur von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt wird, allgemeine Lage der vier Grundpunkte A_i und des festen Kegelschnitts S vorausgesetzt. Die Kurve ist also von der sechsten Ordnung.

Die Forderung, daß $\xi|\eta$ ein Punkt der gesuchten Kurve, ist die, daß das von ihm aus an S gelegte Tangentenpaar gleichzeitig Tangentenpaar an einen variablen Kegelschnitt V_λ des

Büschels wird. Dieser Forderung genügt aber auch jeder Punkt des festen Kegelschnitts (im Fall des Degenierens in ein Punktpaar die Verbindungsgerade der Punkte, doppelt gezählt). Insofern erhält die rationale Form der Darboux'schen Gleichung den Faktor S und erscheint zunächst von der Ordnung acht.

Im Sinn der Cayley'schen Sprechweise[1]) läßt sich die in diesen Blättern zur Besprechung gelangende Kurve auch als „Brennpunktskurve" bezeichnen. Definiert man wie üblich als Brennpunkte eines Kegelschnitts die Schnittpunkte der Tangentenpaare von den unendlich fernen imaginären Kreispunkten aus an den Kegelschnitt und erweitert man mit Cayley den Begriff der Maßgeometrie durch Einführung des absoluten Kegelschnitts S, so erweist sich die an dieser Stelle zu untersuchende Kurve als die Verallgemeinerung der Brennpunktskurve, insofern diese für die spezielle Wahl der unendlich fernen Kreispunkte als absoluten Kegelschnitt aus jener hervorgeht. Die Punkte der untersuchten Kurve mögen daher im neuen Sinn auch als „Brennpunkte" bezeichnet werden. Mit Einführung der neuen Sprechweise, z. B. „die Geraden T_1 und T_2 durch Punkt A stehen senkrecht zueinander" statt „die Geraden T_1 und T_2 durch Punkt A sind harmonisch konjugiert dem Tangentenpaar von A aus an den absoluten Kegelschnitt S", lassen sich die Sätze über die allgemeine Kurve im gleichen Wortlaut darstellen wie die bisher über die spezielle Brennpunktskurve bereits aufgestellten.

Die von Bauer[2]) für den speziellen Fall, daß der absolute Kegelschnitt in die unendlich fernen Kreispunkte ausartet, angestellte Rechnung liefert, wenn

$$(i\,j) = a_i a'_j - a_j a'_i$$

und die Gleichung des Büschels ist

$$V - \lambda V' = 0,$$

mit

$$V = \Sigma a_i x_i^2,$$
$$V' = \Sigma a'_i x_i^2$$

---

[1]) Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie I 1893 S. 62.
[2]) siehe Anm. 1 S. 3.

in rationaler Form

$$(2) \quad (12)\,x_1 x_2 K_1 K_2 + (23)\,x_2 x_3 K_2 K_3 + (31)\,x_3 x_1 K_3 K_1 = 0$$

als Gleichung der Brennpunktskurve, unter K_i den über der Seite x_i des Polardreiecks — gleichzeitig Koordinatendreieck — als Durchmesser gezogenen Kreis verstanden.

Mit der Darboux'schen teilt die vorstehende Form die Forderung, daß ein und nur ein eigentliches Polardreieck gemeinsam für V und V′ existiert und darum auch das Schicksal, daß sie bei verschiedenen speziellen Lagen der vier Grundpunkte, z. B. wenn A_1 und A_2 unter Zugrundelegung einer Fortschreitungsrichtung von A_1 nach A_2 zusammenrücken, unbrauchbar wird. Die Bauer'sche Form geht eben vom Polardreieck als Koordinatendreieck aus, die Darboux'sche entsteht als Resultante von vier Gleichungen, deren jede einzeln die Bedingung ist, daß der Büschelkegelschnitt durch A_i geht.

In den folgenden Zeilen werden zunächst elementare Versuche zur Herleitung neuer für die Diskussion der Ortskurve brauchbarer Gleichungen gemacht; alsdann mit Heranziehung der Invariantentheorie, von ganz allgemeinen Überlegungen ausgehend, die möglichst alle Spezialisierungen umfassende allgemeine, die kanonische Gleichungsform der Ortskurve aufgestellt.

Um eine erste Unterscheidung der Einzelfälle zu gewinnen, braucht man sich nur klar zu machen, daß jedesmal, wenn entweder der feste oder ein Büschelkegelschnitt als Ordnungskegelschnitt doppelt ausartet (in ein zusammenfallendes Geradenpaar), jeder Punkt der Ebene die vom Ortspunkt verlangte Eigenschaft hat, also die Gleichung der Ortskurve identisch verschwinden muß.

Artet ein Büschelkegelschnitt wie besprochen aus, so gibt es unendlich viele dem Büschel gemeinsame Polardreiecke, die Form D des Polardreiecks

$$D = u_d^3 = u_{d_1}\ u_{d_2}\ u_{d_3}\ ^{1})$$

muß also identisch verschwinden.

---

[1]) Die Formenbenennung ist meist dieselbe wie bei Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie Bd. 1 S. 284 ff.

Wenn aber die Form D nicht identisch verschwindet, so kann sie sich wenigstens dahin spezialisieren, daß zwei oder auch alle drei seiner Linearfaktoren gleich werden.

Es ergibt sich daher für die nachfolgenden Betrachtungen die Unterscheidung:

1. D zerfällt in drei voneinander verschiedene Linearfaktoren;
2. zwei der Linearfaktoren von D oder alle drei sind gleich;
3. D verschwindet identisch.

Die Bedingung für das Eintreten der Fälle 2. und 3. gibt § 6.

§ 2.

Gleichung der Ortskurve für den nichtspezialisierten Fall: Die Linearfaktoren von D sind verschieden.

Wie schon erwähnt, gelten unter dieser Voraussetzung — V und V′ haben dann nur ein Polardreieck, und zwar ein wirkliches gemeinsam — die Formen von Darboux und Bauer. Vor Veröffentlichung der letzteren hatte Verfasser die Gleichung seiner verallgemeinerten Aufgabe in genau derselben Form, aber auf anderm Wege, rational dargestellt. Ebenfalls ausgehend vom Polardreieck des Büschels als Koordinatendreieck und unter Voraussetzung allgemeiner Lage der vier Grundpunkte sowohl wie des festen Kegelschnitts, gestaltet sich die Lösung folgendermaßen: Für das erwähnte Koordinatendreieck hat das Büschel die Gleichung

$$d_x^2 = V_\lambda = V + \lambda V' = 0,$$

$$V = \Sigma a_i x_i^2,$$

$$V' = \Sigma a'_i x_i^2,$$

der feste Kegelschnitt

$$s_x^2 = \Sigma s_{ik} x_i x_k = 0.$$

Das vom Ortspunkt ξ aus an $s_x^2 = 0$ gelegte Tangentenpaar, symbolisch $s_x^2 s_\xi^2 - (s_x s_\xi)^2 = 0,$

muß identisch sein mit dem an $d_x^2 = 0$ gelegten, symbolisch

$$d_x^2 d_\xi^2 - (d_x d_\xi)^2 = 0.$$

Beide Geradenpaare müssen also die Achse $x_3 = 0$ in den Punktpaaren

$$(s_{11} x_1^2 + 2 s_{12} x_1 x_2 + s_{22} x_2^2) s_\xi^2 - (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)^2 = 0,$$

[wenn $\gamma_i = s_{i1} \xi_1 + s_{i2} \xi_2 + s_{i3} \xi_3$],

$$(d_{11} x_1^2 + d_{22} x_2^2) d_\xi^2 - (d_{11} x_1 \xi_1 + d_{22} x_2 \xi_2)^2 = 0,$$

oder nach den Variabeln geordnet

$$x_1^2 (s_{11} s_\xi^2 - \gamma_1^2) + 2 x_1 x_2 (s_{12} s_\xi^2 - \gamma_1 \gamma_2) + x_2^2 (s_{22} s_\xi^2 - \gamma_2^2) = 0$$

$$d_{11} x_1^2 (d_{22} \xi_2^2 + d_{33} \xi_3^2) - 2 d_{11} d_{22} x_1 x_2 \xi_1 \xi_2 + d_{22} x_2^2 (d_{11} \xi_1^2 + d_{33} \xi_3^2) = 0$$

schneiden. Die Identität beider Paare erfordert

$$\begin{aligned} d_{11} (d_{22} \xi_2^2 + d_{33} \xi_3^2) &= \varrho (s_{11} s_\xi^2 - \gamma_1^2) &&= \varrho \varphi_{11}, \\ - d_{11} d_{22} \xi_1 \xi_2 &= \varrho (s_{12} s_\xi^2 - \gamma_1 \gamma_2) &&= \varrho \varphi_{12}, \\ d_{22} (d_{11} \xi_1^2 + d_{33} \xi_3^2) &= \varrho (s_{22} s_\xi^2 - \gamma_2^2) &&= \varrho \varphi_{22}; \end{aligned}$$

oder nach Unterdrückung von ϱ, wenn von jetzt ab x statt ξ für den Ortspunkt gesetzt wird,

$$\varphi_{12} (d_{22} x_2^2 + d_{33} x_3^2) + d_{22} x_1 x_2 \varphi_{11} = 0$$

$$\varphi_{12} (d_{11} x_1^2 + d_{33} x_3^2) + d_{11} x_1 x_2 \varphi_{22} = 0;$$

oder mit Berücksichtigung $d_{ii} = a_i + \lambda a'_i$

$$\varphi_{12} (a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2) + \varphi_{11} a_2 x_1 x_2 = \lambda [\varphi_{12} (a'_2 x_2^2 + a'_3 x_3^2) + \varphi_{11} a'_2 x_1 x_2],$$

$$\varphi_{12} (a_1 x_1^2 + a_3 x_3^2) + \varphi_{22} a_1 x_1 x_2 = \lambda [\varphi_{12} (a'_1 x_1^2 + a'_3 x_3^2) + \varphi_{22} a'_1 x_1 x_2];$$

oder nach Einführung von

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \sigma_{33} x_2^2 - 2 \sigma_{23} x_2 x_3 + \sigma_{22} x_3^2, \\ - \varphi_{12} &= \sigma_{33} x_1 x_2 - \sigma_{23} x_1 x_3 - \sigma_{13} x_2 x_3 + \sigma_{12} x_3^2, \\ \varphi_{22} &= \sigma_{33} x_1^2 - 2 \sigma_{13} x_1 x_3 + \sigma_{11} x_3^2, \end{aligned}$$

[σ_{ik} die Unterdeterminanten von $|s_{11} s_{22} s_{33}|$] und Vereinfachung

$$x_3 [a_2 x_2 S_2 - a_3 x_3 S_3] = - \lambda x_3 [a'_2 x_2 S_2 - a'_3 x_3 S_3],$$

$$x_3 [a_1 x_1 S_1 - a_3 x_3 S_3] = - \lambda x_3 [a'_1 x_1 S_1 - a'_3 x_3 S_3].$$

Dabei ist

$$S_1 = \sigma_{23} x_1^2 - \sigma_{13} x_1 x_2 - \sigma_{12} x_1 x_3 + \sigma_{11} x_2 x_3 ,$$

(3) $$S_2 = \sigma_{13} x_2^2 - \sigma_{12} x_2 x_3 - \sigma_{23} x_1 x_2 + \sigma_{22} x_1 x_3 ,$$

$$-\varphi_{12} = S_3 = \sigma_{12} x_3^2 - \sigma_{23} x_1 x_3 - \sigma_{13} x_2 x_3 + \sigma_{33} x_1 x_2 .$$

Die Elimination von λ ergibt als Kurvengleichung, wenn

$$(ij) = a_i a'_j - a_j a'_i ,$$

(4) $$(12)\, x_1 x_2 S_1 S_2 + (23)\, x_2 x_3 S_2 S_3 + (31)\, x_3 x_1 S_3 S_1 = 0.$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Koordinatendreieck, der natürlich wie Gleichung (4) nur so lang möglich ist, als ein wirkliches Polardreieck existiert, wird die Kurvengleichung

(5) $$(12)\, P_1 P_2 T_1 T_2 + (23)\, P_2 P_3 T_2 T_3 + (31)\, P_3 P_1 T_3 T_1 = 0 ;$$

P_i sind die Seiten des Polardreiecks, T_i teilweise durch (3) und genauer noch in den folgenden Zeilen charakterisierte Kegelschnitte.

§ 3.

Gleichung der Ortskurve für den Fall: D verschwindet nicht.

Für den Fall, daß im Polardreieck zwei Seiten oder alle drei zusammenfallen, bezw. zwei oder drei Eckpunkte, wird die vorausgehende Gleichung genau wie alle andern bisher aufgestellten unbrauchbar. Einen Schritt weiter zur Aufstellung einer für alle möglichen Spezialisierungen noch gültigen Form führt die nachfolgende geometrische Überlegung. Die Ortskurve schneidet den festen Kegelschnitt S in zwölf Punkten, vorausgesetzt, daß S nicht als Klaßkegelschnitt ausartet. Zieht man von einem solchen Schnittpunkt aus das Tangentenpaar an S, so muß dieses (zusammenfallende) Paar gleichzeitig Tangentenpaar an einen variablen Kegelschnitt des Büschels sein, der entweder den festen berührt oder ausartet. Würde er weder ausarten noch S berühren, so würde man zu ihm und S die vier gemeinsamen Tangenten angeben können und von den sechs so entstehenden Kurvenpunkten keinen auf S erhalten.

Zerfällt nun V_λ, was für drei Werte von λ geschieht, so werden auch die im allgemeinen Fall vorhandenen vier Tangenten zu je zweien zusammenfallen und vier Schnittpunkte in M, je einen in P und P′ erzeugen, wenn M der Doppelpunkt des zerfallenden V_λ, P und P′ die Berührpunkte der von M aus an S gezogenen Tangenten sind. Von den Schnittpunkten der Ortskurve C_6 mit S sind also bereits sechs durch die zerfallenden Kegelschnitte des Büschels bestimmt: es sind die Schnittpunkte der Polaren der Ecken des Polardreiecks mit S.

Die restierenden sechs aber durch die S berührenden Büschelkegelschnitte. Die Jakobi'sche Kurve, symbolisch

$$B = a_x\, b_x\, S_x\, (a\, b\, S) = 0, \tag{6}$$

[wenn $S = S_x^2$ der feste Kegelschnitt, $V_\lambda = a_x^2 + \lambda\, b_x^2 = V + \lambda\, V'$ das Büschel] des Netzes der drei Kegelschnitte S, V, V′ ist nun der geom. Ort der Berührungspunkte der Netzkegelschnitte; $B = 0$ ist eine Kurve dritter Ordnung, schneidet demnach auf S sechs Punkte aus, in denen S von einem Büschelkegelschnitt V_λ berührt wird.

Die Ortskurve geht also durch die zwölf Schnittpunkte von $S = 0$ mit $G_1\, G_2\, G_3 \cdot B = 0$, wenn G_i die Polare zur Ecke u_i des Polardreiecks ist, hat also die Gleichung

$$G_1\, G_2\, G_3\, B + \Phi \cdot S = 0, \tag{7}$$

wobei Φ eine noch näher zu charakterisierende Form vierten Grades ist. Voraussetzung für die Aufstellung dieser Gleichung ist die Bedingung, daß D nicht identisch verschwindet und S nicht als Klaßkegelschnitt ausartet.

Unter der weitern Voraussetzung, daß D drei verschiedene Linearfaktoren hat, d. h. das Polardreieck ein eigentliches ist, läßt sich Φ darstellen durch einen Vergleich von (7) mit (4); nimmt man als Koordinatendreieck das Polardreieck, so wird bis auf einen Zahlenfaktor

$$B = (12)\, x_1\, x_2\, G_3 + (23)\, x_2\, x_3\, G_1 + (31)\, x_3\, x_1\, G_2 \tag{8}$$

und [in etwas weitläufiger Art durch Vergleich auffindbar]

$$\Phi = (12)\, x_1\, x_2\, K_3 + (23)\, x_2\, x_3\, K_1 + (31)\, x_3\, x_1\, K_2,$$

wobei

$$K_i = G_i\, (s_{ij}\, G_k + s_{jk}\, G_j) - s_{ij}\, s_{ik}\, S.$$

Die Substitution von B und Φ in (7) ergibt dann noch die nähere Fixierung der durch Gleichung (3) dargestellten Kegelschnitte zu

(9) $$S_i = G_j G_k - s_{jk} S.$$

§ 4.

Die kanonische Form der Ortskurve.

Gültig für jeden Fall der Spezialisierung des Polardreiecks wie auch für den, daß $D = 0$, erhält man die Gleichung der Ortskurve unter Benützung der Invariantentheorie.

Sei die gewöhnliche Form der beiden das Büschel definierenden Kegelschnitte

$$f = a_x^2 = a_{1x}^2 = a_{2x}^2 = \cdots,$$
$$\varphi = b_x^2 = b_{1x}^2 = b_{2x}^2 = \cdots,$$

die gewöhnliche Form des Büschels also

$$\lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 b_x^2 = \lambda_1 a_{1x}^2 + \lambda_2 b_{1x}^2 = \cdots\cdots,$$

so wird durch Einführung binärer Symbole A, B, $\cdots$, die dann nur mit den ternären a, b, $\cdots\cdots$ zusammen Bedeutung haben,[1]) die Form der beiden Kegelschnitte

$$f = a_x^2 A_1 = b_x^2 B_1 = \cdots,$$
$$\varphi = a_x^2 A_2 = b_x^2 B_2 = \cdots$$

und die des Büschels

$$a_x^2 A_\lambda = b_x^2 B_\lambda = \cdots.$$

In Linienkoordinaten ist die neue Form des Büschels

$$F_\lambda^2 = (a\,b\,u)^2 A_\lambda B_\lambda = u_\vartheta^2 \Theta_\lambda^2$$
$$[= F_{11} \lambda_1^2 + 2 F_{12} \lambda_1 \lambda_2 + F_{22} \lambda_2^2 \text{ der alten Form}]$$

und die Form des festen Kegelschnitts, der immer als Klassenkegelschnitt vorausgesetzt, sei, u_σ^2.

Sei ξ ein Punkt der Ortskurve, u und v je eine Gerade

---

[1]) Auf die Einführung dieser doppelten Symbole wurde Verfasser von Herrn Dr. K. Petri, Assistent am math. Inst. d. Univ. Erlangen, hingewiesen.

durch ξ und $w = u + \varrho v$ Tangente an u_σ^2 wie $\Theta_\lambda^2 u_\vartheta^2$. Dann müssen die beiden Formen w_σ^2 und $\Theta_\lambda^2 w_\vartheta^2$ identisch sein.

$$w_\sigma^2 = u_\sigma^2 + 2\varrho\, u_\sigma v_\sigma + \varrho^2 v_\sigma^2,$$

$$\Theta_\lambda^2 w_\vartheta^2 = \Theta_\lambda^2 (u_\vartheta^2 + 2\varrho\, u_\vartheta v_\vartheta + \varrho^2 v_\vartheta^2).$$

Das Zusammenbestehen der daraus hervorgehenden Gleichungen

$$\Theta_\lambda^2 u_\vartheta^2 = \varkappa u_\sigma^2,$$

$$\Theta_\lambda^2 u_\vartheta v_\vartheta = \varkappa u_\sigma v_\sigma,$$

$$\Theta_\lambda^2 v_\vartheta^2 = \varkappa v_\sigma^2,$$

erfordert gleichzeitig

$$\Theta_\lambda^2 (\vartheta\sigma\xi)\, u_\vartheta u_\sigma = 0, \tag{11}$$

$$[\Theta_\lambda^2 (\vartheta\sigma\xi)\, u_\vartheta u_\sigma]_v = 0, \tag{12}$$

$$\Theta_\lambda^2 (\vartheta\sigma\xi)\, v_\vartheta v_\sigma = 0, \tag{13}$$

wenn f_v die erste Polare von f nach v ist. Die Resultante von zweien der vorstehenden Formen gibt also die gesuchte Form der Ortskurve. Man bildet sie als Diskriminante der Funktionaldeterminante.

Die Funktionaldeterminante von (11) und (12) ist

$$\Delta_\lambda^2 u_\delta^2 = -\tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda} (\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi)\, u_{\vartheta_1} u_{\sigma_1} (u_\vartheta v_\sigma + u_\sigma v_\vartheta)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda} (\vartheta_1\sigma\xi)(\vartheta\sigma_1\xi)\, u_\vartheta u_{\sigma_1} (u_{\vartheta_1} v_\sigma + u_\sigma v_{\vartheta_1}). \tag{14 a}$$

also

$$2\Delta_\lambda^2 u_\delta^2 = \tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda}\, u_\vartheta u_{\vartheta_1} u_{\sigma_1} v_\sigma [(\vartheta_1\sigma\xi)(\vartheta\sigma_1\xi) - (\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi)]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda}\, u_\sigma u_{\sigma_1} (\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi)[u_\vartheta v_{\vartheta_1} - u_{\vartheta_1} v_\vartheta],$$

oder wenn

$$Q = u_\sigma v_{\sigma_1} (\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi) - u_{\sigma_1} v_\sigma (\vartheta_1\sigma_1\xi)(\vartheta\sigma\xi)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sigma\sigma_1\xi)^2 (\vartheta\vartheta_1\xi)$$
$$= \tfrac{1}{2} S_\xi^2 (\vartheta\vartheta_1\xi),$$

wodurch $S = S_\xi^2$ bereits als wirklicher Faktor definiert ist,

$$2\Delta_\lambda^2 u_\delta^2 = \tfrac{1}{4} S \cdot (\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda} (\vartheta\vartheta_1\xi)\, u_\vartheta u_{\vartheta_1},$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda \Theta_{1\lambda} (\vartheta\vartheta_1\xi)(\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi)\, u_\sigma u_{\sigma_1},$$

oder mit

(14 b) $$P_\lambda^2 u_p^2 = (\Theta\Theta_1)\,\Theta_\lambda\Theta_{1\lambda}\,(\vartheta\vartheta_1\xi)\,u_\vartheta u_{\vartheta_1},$$

also symbolisch

$$u_p^2 = u_\vartheta u_{\vartheta_1}(\vartheta\vartheta_1 x)$$
$$u_p v_p = u_\vartheta v_{\vartheta_1}(\vartheta\vartheta_1 x)$$

und damit für $u = \overline{\sigma x}$, $v = \overline{\sigma_1 x}$

$$(\vartheta\vartheta_1\xi)(\vartheta\sigma\xi)(\vartheta_1\sigma_1\xi) = (p\sigma\xi)(p\sigma_1\xi),$$
$$2\Delta_\lambda^2 u_\delta^2 = \tfrac{1}{4} P_\lambda^2 u_p^2 .\ S + \tfrac{1}{2} P_\lambda^2 u_\sigma u_{\sigma_1}(p\sigma\xi)(p\sigma_1\xi) .$$

Hierin wird durch die Relation

$$u_\sigma u_{\sigma_1} v_\sigma v_{\sigma_1} = u_{\sigma_1}^2 v_{\sigma_1}^2 - \tfrac{1}{2}(\overline{\sigma\sigma_1}\,uv)^2$$

für $v = \overline{p\xi}$ der zweite Summand

$$\tfrac{1}{2} P_\lambda^2 u_\sigma u_{\sigma_1}(p\xi\sigma)(p\xi\sigma_1) = \tfrac{1}{2} P_\lambda^2 [(p\xi\sigma)^2 u_{\sigma_1}^2 - \tfrac{1}{2} S \cdot u_p^2],$$

also

(14) $$4\Delta_\lambda^2 u_\delta^2 = P_\lambda^2 (p\xi\sigma)^2 u_{\sigma_1}^2.$$

Die Funktionaldeterminante enthält also in $u_{\sigma_1}^2$ den festen Kegelschnitt, der dann in die Endgleichung als wegzulassender Faktor mit eintritt. Die Diskriminante von (14), d. i. die Resultante von (11) und (12) erscheint dann mit

(15) $$C_6 = (PP_1)^2 (p\sigma\xi)^2 (p_1\sigma_1\xi)^2$$

als die gesuchte Form der Ortskurve.

§ 5.

Reduktion von C_6, wenn $D = u_d^3$ nicht identisch verschwindet.

Die Zurückführung von C_6 auf das System der Formen $f = a_x^2$, $\varphi = b_x^2$ oder auf die Kovarianten von $N = (abu)\,a_x b_x$[1]) soll in den folgenden Zeilen geschehen, und zwar mit Hilfe der nachstehenden einfachen oder zusammengesetzten Formen

$$f = A_1 a_x^2 = B_1 b_x^2 = \ldots = a_x^2 = a_{1x}^2 = \ldots$$
$$\varphi = A_2 a_x^2 = B_2 b_x^2 = \ldots = b_x^2 = b_{1x}^2 = \ldots$$

[1]) Gordan Math. Annalen Bd. 5.

$$F_{11} = \Theta_1^2 u_\vartheta^2 = A_1 B_1 (abu)^2 = (aa_1 u)^2 = u_\alpha^2$$
$$F_{22} = \Theta_2^2 u_\vartheta^2 = A_2 B_2 (abu)^2 = (bb_1 u)^2 = u_\beta^2$$
$$F_{12} = \Theta_1 \Theta_2 u_\vartheta^2 = A_1 B_2 (abu)^2 = (abu)^2 = u_\gamma^2$$
$$A_{111} = A_1 B_1 C_1 (abc)^2 = (aa_1 a_2)^2 = a_\alpha^2$$
$$A_{112} = A_1 B_1 C_2 (abc)^2 = (aa_1 b)^2 = b_\alpha^2$$
$$A_{122} = A_1 B_2 C_2 (abc)^2 = (a\, bb_1)^2 = a_\beta^2$$
$$A_{222} = A_2 B_2 C_2 (abc)^2 = (bb_1 b_2)^2 = b_\beta^2$$
$$N = N_x^2 u_n$$

(16) $$= \tfrac{1}{2} (abu)\, a_x b_x (AB) = (abu)\, a_x b_x .$$

(17a)
$$(\gamma\gamma_1 x)^2 = \overline{(ab}\ \overline{a_1 b_1}\ x)^2$$
$$= [(aa_1 b_1)\, b_x - (ba_1 b_1)\, a_x]^2$$
$$= A_{112}\varphi + A_{122} f - 2 (aa_1 b_1)(ba_1 b_1)\, a_x b_x$$
$$= A_{112}\varphi + A_{122} f - \tfrac{1}{2} (\alpha\beta x)^2 ,$$

also

(17) $$(\gamma\gamma_1 x)^2 = A_{112}\varphi + A_{122} f - \tfrac{1}{2} \Phi_{12} .$$

(18a)
$$(\Theta\Theta_1)^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1} = (abu)(abv)(cdu)(cdv)(AC)(BD)$$
$$= \overline{(ac}\ \overline{bu}\ \overline{du)}\,(abv)(cdv)(AC)(BD) ,$$

woraus nach Einsetzen von x für $\overline{bu}$, y für $\overline{du}$, x′ für $\overline{bv}$, y′ für $\overline{dv}$ wird

$$(\Theta\Theta_1)^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1} = \overline{(ac}\, x\, y)\, a_x' c_y' (AC)(BD)$$

und daraus wieder wegen

$$(AC)(acu)\, a_x c_y = 2 N_x N_y u_n \qquad (16)$$
$$(\Theta\Theta_1)^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1} = 2 (nxy) N_x' N_y' (BD)$$
$$= 2 u_n (bdu)(Nbv)(Ndv)(BD) ,$$

wenn man wieder für x, y, x′, y′ die ursprünglichen Werte einsetzt. Wegen

$$(BD)(bdu)\, b_x d_x = 2 N_x^2 u_n \qquad (16)$$

wird

$$(BD)(bdu)(b N_1 v)(d N_1 v) = 2 (N N_1 v)^2 u_{n_1},$$

und damit

(18) $$(\Theta\Theta_1)^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1} = 4 (N N_1 v)^2 u_n u_{n_1}.$$

Auf das Formensystem von f und φ zurückgeführt, wird

$$(\Theta\Theta_1)^2 u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1} = 2 [u_\alpha v_\alpha \cdot u_\beta v_\beta - u_\gamma v_\gamma \cdot u_{\gamma_1} v_{\gamma_1}]$$
(19) $$= 2 [u_\alpha^2 \cdot v_\beta^2 - u_\gamma^2 \cdot v_{\gamma_1}^2] - (\alpha\beta x)^2 + (\gamma\gamma_1 x)^2 .$$

Damit wird dann

$$q = u_q{}^4 = (\Theta\Theta_1)^2\, u_\vartheta{}^2\, u_{\vartheta_1}{}^2 = 4\,(NN_1u)^2\, u_n\, u_{n_1} \qquad (18)$$

$$= 2\,[u_\alpha{}^2 u_\beta{}^2 - u_\gamma{}^2 u_{\gamma_1}{}^2] \qquad (19)$$

Ebenso erhält man aus (18) bezw. (19)

$$\tfrac{1}{2}\psi = \tfrac{1}{2}\,(\Theta\Theta_1)^2\,(\vartheta\vartheta_1 x)^2 \qquad (22a)$$

$$= 3\,[(\Theta\Theta_1)^2\, u_\vartheta{}^2\, u_{\vartheta_1}{}^2]_{v^2} - 3\,(\Theta\Theta_1)^2\, u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1}\,,$$

wenn f_{v^2} die zweite Polare von f nach v definiert. Dann wird

$$\tfrac{\psi}{2} = 2\,(NN_1u)^2\, v_n\, v_{n_1} + 8\,(NN_1u)\,(NN_1v)\, u_n\, v_{n_1} + 2\,(NN_1\,v)^2\, u_n\, u_{n_1}$$
$$- 6\,(NN_1u)^2\, v_n\, v_{n_1} \qquad - 6\,(NN_1\,v)^2\, u_n\, u_{n_1}$$

also

$$-\tfrac{1}{8}\psi = (NN_1u)^2 v_n\, v_{n_1} - 2\,(NN_1u)\,(NN_1v)\, u_n\, v_{n_1} + (NN_1v)^2 u_n\, u_{n_1}$$

$$= \overline{(NN_1}\,nx)\,(\overline{NN_1}\,n_1x) \qquad (22b)$$

$$= - N_x\, N_{1n}\, N_{n_1}\, N_{1x}$$

also

$$\psi = 8\, N_x\, N_{1x}\, N_{n_1}\, N_{1n}\,. \qquad (22)$$

Auf das System von f und φ zurückgeführt, wird nach (19) vermöge der Relation

$$\tfrac{\psi}{2} = \tfrac{1}{2}(\Theta\Theta_1)^2\,(\vartheta\vartheta_1 x)^2 = 3\,[(\Theta\Theta_1)^2\, u_\vartheta{}^2\, u_{\vartheta_1}{}^2]_{v^2} - 3\,(\Theta\Theta_1)^2\, u_\vartheta v_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_1}$$

$$\psi = 2\,[(\alpha\beta x)^2 - (\gamma\gamma_1 x)^2]$$

$$= 3\,(\alpha\beta x)^2 - 2\,\left(A_{112}\,\varphi + A_{122}\,f\right) \qquad \text{wegen (17)}\,. \qquad (23)$$

$D = u_d{}^3$, d. i. die Form des Polardreiecks, läßt sich in folgender Weise auf die Formen in N zurückführen. Wegen

$$N_x{}^2\, u_n = (abu)\, a_x\, b_x$$

wird

$$(abu)\, a_\beta\, b_\alpha = N_\beta\, N_\alpha\, u_n + \tfrac{1}{2}(abu)\,(ab\,\overline{\beta\alpha})$$

und

$$D = (abu)\, a_\beta\, b_\alpha\, u_\alpha\, u_\beta$$

$$= \tfrac{1}{2}\,[N_\alpha{}^2\, u_\beta{}^2 + N_\beta{}^2\, u_\alpha{}^2 - (Nu\,\overline{\alpha\beta})^2]\, u_n + \tfrac{1}{2}\,(abu)\,(ab\,\overline{\beta\alpha})\, u_\alpha\, u_\beta$$

$$= - (Nu\,\overline{\alpha\beta})^2\, u_n\,,$$

welche Form sich nach

$$\psi_x{}^2 = 3\,(\alpha\beta x)^2 - 2\,(A_{112}\,\varphi + A_{122}\,f) \qquad (23)$$

für $x = \overline{Nu}$ weiterhin reduzieren läßt. Aus

$$(\psi\,Nu)^2 = 3\,(\overline{\alpha\beta}\,Nu)^2 - 2\,A_{112}\,(b\,Nu)^2 - 2\,A_{122}\,(a\,Nu)^2$$
$$= 3\,(\overline{\alpha\beta}\,Nu)^2$$

ergibt sich

$$D = -\tfrac{1}{3}(\psi\,Nu)^2\,u_n\,. \tag{24}$$

Eine andere Darstellung von D ohne die Form ψ ergibt die Gleichung (22 b).

$$\psi_x{}^2 = -8\,(\overline{NN_1}\,n\,x)\,(\overline{NN_1}\,n_1\,x),$$

woraus

$$D = -\tfrac{1}{3}(\psi\,Nu)^2\,u_n = \tfrac{8}{3}\,(\overline{NN_1}\;n\;\overline{N_2 u})\,(\overline{NN_1}\;n_1\;\overline{N_2 u})\,u_n$$
$$= \tfrac{8}{3}\,(NN_1N_2)^2\,u_n\,u_{n_1}\,u_{n_2} \tag{25}$$

Die Form $\Pi = u_\pi{}^4 = (PP_1)^2\,u_p{}^2\,u_{p_1}{}^2$ ergibt sich als Diskriminante von $P\lambda^2\,u_p{}^2$, oder wenn man

$$s = \Theta\lambda^2\,u_\vartheta\,v_\vartheta\,,$$
$$t = \Theta_1\lambda^2\,u_{\vartheta_1}\,w_{\vartheta_1}$$

setzt und damit darstellt

$$P\lambda^2\,u_p{}^2 = (\Theta\Theta_1)\,\Theta\lambda\;\Theta_1\lambda\;(\vartheta\vartheta_1\,x)\,u_\vartheta\,u_{\vartheta_1}$$

oder für $x = \overline{vw}$

$$P\lambda^2\,u_p{}^2 = 2\,(\Theta\Theta_1)\,\Theta\lambda\;\Theta_1\lambda\;u_\vartheta\,u_{\vartheta_1}\,v_\vartheta\,w_{\vartheta_1}$$
$$= 2\,(s,t)$$

als Resultante von s und t; dann ist[1])

$$\Pi = u_\pi{}^4 = 2\,(A_{ss}\,A_{tt} - A_{st}{}^2)\,,$$

wobei

$$A_{ss} = 4\,(NN_1\,v)^2\,u_n\,u_{n_1}\,,$$
$$A_{tt} = 4\,(NN_1\,w)^2\,u_n\,u_{n_1}\,,$$
$$A_{st} = 4\,(NN_1\,v)\,(NN_1\,w)\,u_n\,u_{n_1},$$

also

$$\Pi = 16\,u_n\,u_{n_1}\,u_{n_2}\,u_{n_3}\,(\overline{NN_1}\;\overline{N_2N_3}\;x)^2\,.$$

Die Entwicklung

$$(\gamma\gamma_1\,x)^2 = (\overline{ab}\;\overline{a_1b_1}\,x)^2 \tag{17}$$

---

[1]) Gordan, Vorlesungen über Invarianten, herausgeg. von Kerschensteiner, S. 141.

gibt für $a = N$, $b_1 = N_1$, $a_1 = N_2$, $b_1 = N_3$

$$(\overline{NN_1}\ \overline{N_2N_3}\ x)^2 = \tfrac{4}{3}(NN_1N_2)^2 N_3{}_x{}^2$$

und damit wegen

$$D = \tfrac{8}{3}(NN_1N_2)^2 u_n u_{n_1} u_{n_2} \text{ und } N = N_3{}_x{}^2 u_{n_3}$$

$$H = 8DN. \tag{26}$$

Die Form

$$g = (\Theta\Theta_2)^2(\Theta_1\Theta_3)^2(\vartheta\vartheta_1 x)^2(\vartheta_2\vartheta_3 x)^2, \tag{27 a}$$

die ebenso wie die vorausgehenden und die noch folgende zur Reduzierung von C_6 auf das System von f, φ und s dient, läßt sich unter Zuhilfenahme von

$$\psi = (\Theta\Theta_1)^2(\vartheta\vartheta_1 x)^2 \tag{22 a}$$

und

$$\Delta_\lambda{}^3 = (abc)^2 A_\lambda B_\lambda C_\lambda \qquad \text{(siehe 27 c)} \tag{27 b}$$

in folgender Weise nach f und φ ausdrücken. Wegen

$$(\vartheta\vartheta' x)^2\Theta_\lambda{}^2\Theta'\mu^2 = [(\vartheta\vartheta' x)^2\Theta_\lambda{}^2\Theta'_\lambda{}^2]_{\mu^2} + \tfrac{1}{3}(\vartheta\vartheta' x)^2(\Theta\Theta')^2(\lambda\mu)^2$$
$$= [(\vartheta\vartheta' x)^2\Theta_\lambda{}^2\Theta'_\lambda{}^2]_{\mu^2} + \tfrac{1}{3}\psi\cdot(\lambda\mu)^2$$

und mit Berücksichtigung von

$$\Phi_{11} = (aa' x)^2$$
$$= \Theta_1{}^2\Theta'_1{}^2(\vartheta\vartheta' x)^2$$
$$= \tfrac{4}{3}(bcd)^2 B_1 C_1 D_1 \cdot a_x{}^2 A_1,$$

also

$$\Theta_\lambda{}^2\Theta'_\lambda{}^2(\vartheta\vartheta' x)^2 = \tfrac{4}{3}\Delta_\lambda{}^3 a_x{}^2 A_\lambda$$
$$= \tfrac{4}{3}\varrho_\lambda{}^4,$$

woraus folgt

$$(\vartheta\vartheta' x)^2\Theta_\lambda{}^2\Theta'_\mu{}^2 = \tfrac{4}{3}\varrho_\lambda{}^2\varrho_\mu{}^2 + \tfrac{1}{3}\psi\cdot(\lambda\mu)^2,$$

wird für $\lambda = \Theta_2$ und $\mu = \Theta_3$, wenn jetzt Θ_1 statt Θ' gesetzt wird,

$$g = \tfrac{4}{3}(\varrho\Theta_2)^2(\varrho\Theta_3)^2(\vartheta_2\vartheta_3 x)^2 + \tfrac{1}{3}\psi^2$$
$$= \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{3}(\Delta\varrho)^3 a_x{}^2(A\varrho) + \tfrac{1}{3}\psi^2.$$

$(\varrho\Delta)^3(\varrho A)$ ist die Polare von $\varrho_\lambda{}^4 = \Delta_\lambda{}^3 A_\lambda a_x{}^2$ nach μ, wenn man noch $\lambda = \Delta$, $\mu = A = B$ setzt; also wird aus

$$\varrho_\lambda{}^3 \varrho_\mu = \tfrac{1}{4} b_x{}^2 [3 \Delta'_\lambda{}^2 \Delta'_\mu B_\lambda + \Delta'_\lambda{}^3 B_\mu],$$
$$a_x{}^2 (\varrho \Delta)^3 (\varrho A) = -\tfrac{3}{4} a_x{}^2 b_x{}^2 (\Delta\Delta')^2 (\Delta B)(\Delta' A).$$

Damit wird

$$g = -\tfrac{4}{3} (\Delta\Delta')^2 (\Delta'_1 \varphi - \Delta'_2 f)(\Delta'_1 \varphi - \Delta'_2 f) + \tfrac{1}{3} \psi^2.$$

Der erste Summand der rechten Gleichungsseite geht aus der Hesse'schen Kovariante von $\Delta_\lambda{}^3$, nämlich $\tau_\lambda{}^2 = (\Delta\Delta')^2 \Delta_\lambda \Delta'_\lambda$, durch die Substitution $\lambda = A$, d. i. $\lambda_1 = A_2 = \varphi$, $\lambda_2 = -A_1 = -f$ hervor. Nun ist

(27 c) $$\Delta_\lambda{}^3 = A_{111} \lambda_1{}^3 + 3 A_{112} \lambda_1{}^2 \lambda_2 + 3 A_{122} \lambda_1 \lambda_2{}^2 + A_{222} \lambda_2{}^3$$

und

$$\tau_\lambda{}^2 = 2 (A_{111} A_{122} - A_{112}{}^2) \lambda_1{}^2 - 2 (A_{111} A_{222} - A_{112} A_{122}) \lambda_1 \lambda_2 + 2 (A_{112} A_{222} - A_{122}{}^2) \lambda_2{}^2,$$

also

(27 d) $$(\tau A)^2 = 2 (A_{111} A_{122} - A_{112}{}^2) \varphi^2 - 2 (A_{111} A_{222} - A_{112} A_{122}) f \varphi + 2 (A_{112} A_{222} - A_{122}{}^2) f^2$$

und damit

(27) $$g = -\tfrac{4}{3} (\tau A)^2 + \tfrac{1}{3} \psi^2$$

wie verlangt auf das System von f und φ zurückgeführt.

Die Form

(28 a) $$l = l_x{}^2 = (P P_1)^2 (p p_1 x)^2$$

erhält man wegen

$$(PP_1)^2 u_p{}^2 v_{p_1}{}^2 = (\Theta\Theta_1)(\Theta_2\Theta_3)(\Theta\Theta_2)(\Theta_1\Theta_3)(\vartheta\vartheta_1 x)(\vartheta_2\vartheta_3 x) u_\vartheta u_{\vartheta_1} v_{\vartheta_2} v_{\vartheta_3},$$

d. i. die zweite Überschiebung von $P_\lambda{}^2 u_p{}^2$ über $P_1 \lambda^2 v_{p_1}{}^2$ (14 b) und der bekannten Relation

$$(PP_1)^2 (pp_1 x)^2 = 3 (PP_1)^2 u_p{}^2 v_{p_1}{}^2 - 3 [(PP_1)^2 u_p{}^2 u_{p_1}{}^2]_{v^2},$$

wobei

$$[(PP_1)^2 u_p{}^2 u_{p_1}{}^2]_{v^2} = \tfrac{1}{3} (\Theta\Theta_1)(\Theta_2\Theta_3)(\Theta\Theta_2)(\Theta_1\Theta_3)(\vartheta\vartheta_1 x)(\vartheta_2\vartheta_3 x) \cdot [u_\vartheta u_{\vartheta_2} v_{\vartheta_1} v_{\vartheta_3} + u_{\vartheta_2} u_{\vartheta_3} v_\vartheta v_{\vartheta_1} + u_\vartheta u_{\vartheta_3} v_{\vartheta_1} v_{\vartheta_2}],$$

als

(28 b) $$l = \tfrac{1}{2} (\Theta\Theta_1)(\Theta_2\Theta_3)(\Theta\Theta_2)(\Theta_1\Theta_3) [(\vartheta\vartheta_2 x)^2 (\vartheta_1\vartheta_3 x)^2 - (\vartheta\vartheta_3 x)^2 (\vartheta_1\vartheta_2 x)^2]$$
$$= \tfrac{1}{2} (A + B);$$

A und B lassen sich nun sehr leicht nach ψ' und g ausdrücken, wie folgt:

$$2\,A = (\Theta\Theta_2)^2\,(\Theta_1\Theta_3)^2\,(\vartheta\vartheta_2\,x)^2\,(\vartheta_1\vartheta_3\,x)^2$$
$$= \psi^2, \qquad (22\,a)$$

$$B = -g + (\Theta\Theta_1)\,(\Theta_2\Theta_3)\,(\Theta\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_3)\,(\vartheta_1\vartheta_3\,x)^2\,(\vartheta\vartheta_2\,x)^2 \qquad (27\,a)$$
$$= -g + A. \qquad (28\,b)$$

Damit wird dann

$$l_x^2 = \tfrac{1}{2}\,(\psi^2 - g)$$

und nach (27)

$$l_x^2 = \tfrac{1}{3}\,[\psi^2 + 2\,(\tau\,A)^2]. \qquad (28)$$

Die Benützung der vorangehenden Gleichungen läßt nun die Form C_6 der Ortskurve folgendermaßen reduzieren. Die Identität

$$3\,(PP_1)^2\,u_p^2\,v_{p_1}^2 = 3\,[(PP_1)^2\,u_p^2\,u_{p_1}^2]_{v^2} + (PP_1)^2\,(pp_1\,\overline{uv})^2$$

oder wegen (26)

$$(PP_1)^2\,u_p^2\,v_{p_1}^2 = 8\,[DN]_{v^2} + \tfrac{1}{3}\,(PP_1)^2\,(pp_1\,\overline{uv})^2$$

ergibt für $u = \overline{\sigma x}$ $\quad v = \overline{\sigma_1 x}$, wenn von jetzt ab für den Ortspunkt x statt ξ gesetzt wird,

$$(PP_1)^2\,(p\,\sigma\,x)^2\,(p_1\,\sigma_1\,x)^2 = 8\,[DN]_{v^2} + \tfrac{1}{3}\,(PP_1)^2\,S_x^2\,(pp_1\,x)^2$$
$$= 8\,[DN]_{v^2} + \tfrac{1}{3}\,S_x^2 \cdot l_x^2 \qquad 28a)$$

und damit als reduzierte Form der Ortskurve wegen (15) und (28)

$$C_6 = 8\,[DN]_{v^2} + \tfrac{1}{9}\,S\,[\psi^2 + 2\,(\tau\,A)^2], \qquad (29)$$

wobei in $[DN]_{v^2}$ $\quad u = \overline{\sigma x}$, $\quad v = \overline{\sigma_1 x}$ zu setzen ist.

Der Wert dieser Gleichung gegenüber den bisher aufgestellten (1), (2), (4) und (7) ist der, daß sie keinerlei Voraussetzung macht über die Spezialisierung des Polardreiecks, solange nur D nicht identisch verschwindet.

Nun läßt sich auch leicht die Form Φ der Gleichung (7)

$$G_1\,G_2\,G_3 \cdot B + \Phi S = 0,$$

bekannt bereits für den Fall eines nicht zerfallenden Polardreiecks, für jegliche Spezialisierung unter den schon ausgesprochenen Voraussetzungen — D darf nicht identisch verschwinden und S nicht als Klaßkegelschnitt ausarten —

entwickeln, wenn man die Form $D = u_d^3$ in C_6 einführt. Dann wird

$$C_6 = 8\, N_x^2\, (n\,\sigma_1\, x)\, (d\,\sigma\, x)^2\, (d\,\sigma_1\, x) + \tfrac{1}{9}\, S \cdot [\psi^2 + 2\,(\tau\, A)^2]$$

oder mit Einführung, bezw. Abkürzung

$$\Psi = \psi^2 + 2\,(\tau\, A)^2$$

$$u_s^2 = \tfrac{4}{3}\,(\sigma\sigma_1\, \sigma_2)^2\, u_\sigma^2 = \tfrac{4}{3}\,\delta\, u_\sigma^2$$

und nach Multiplikation mit $\frac{4}{3}\,\delta$

$$\tfrac{4}{3}\,\delta\, C_6 = 8\, N_x^2\, (n\, s_1\, x)\, (d\, s_1\, x)\, (d\,\sigma\, x)^2 + \tfrac{4}{27}\,\delta\, S\, \Psi.$$

Daraus wird wegen

$$(n\, s\, x)\, u_s = (\overline{SS_1}\, x\, n)\, u_s = 2\, S_x\, S_{1n}\, (SS_1\, u)\,,$$

also

$$\begin{aligned}(n\, s\, x)\, (d\, s\, x) &= 2\, S_x\, S_{1n}\, (S_x\, S_{1d} - S_d\, S_{1x}) \\ &= 2\,[S_x^2\, S_{1n}\, S_{1d} - S_x\, S_{1x}\, S_d\, S_{1n}]\,,\end{aligned}$$

und

$$B_x^3 = a_x\, b_x\, S_x\, (a\, b\, S) = N_x^2\, S_n\, S_x\,,$$

d. i. der bereits durch (6) definierten Funktionaldeterminante der drei Kegelschnitte f, φ, S,

$$\tfrac{1}{3}\,\delta\, C_6 = C'_6 = -\,4\, B_x^3 \cdot (d\,\sigma\, x)^2 \cdot S_x\, S_d + S\left[\tfrac{1}{27}\,\delta\, \Psi + 4\, K\right].$$

womit K definiert ist. Multipliziert man C'_6 nochmal mit $\frac{\delta}{3}$, so wird wegen

$$\begin{aligned}(d\, s\, x)^2 &= (\overline{SS_1}\, d\, x)^2 \\ &= 2\, S_x^2\, S_{1d}^2 - 2\, S_x\, S_d\, S_{1x}\, S_{1d}\,, \\ \tfrac{1}{3}\,\delta\, C'_6 &= C''_6 \\ &= 2\, B_x^3 \cdot S_x\, S_d\, S_{1x}\, S_{1d}\, S_{2x}\, S_{2d} + \\ &\qquad + S\left[\tfrac{\delta^2}{81}\,\Psi + \tfrac{4}{3}\, K\,\delta - 2\, B_x^3 \cdot S_{1d}^2 \cdot S_x\, S_d\right]\end{aligned}$$

oder

$$C_6 = \gamma\, B\, G_1\, G_2\, G_3 + S\, \Phi\,. \tag{30}$$

Damit ist, da G_i die Polare der Ecken des gemeinsamen Polardreiecks ist, die frühere Form (7) der Ortskurve hergestellt und gleichzeitig Φ bestimmt und auf das System von f und φ zurückgeführt.

§ 6.

Reduktion von C_6, wenn D identisch verschwindet.

Solange die vier Grundpunkte A_i allgemeine Lage haben, wird immer ein und nur ein gemeinsames und nicht ausartendes Polardreieck vorhanden sein. Jede Spezialisierung dahin, daß zwei oder mehrere dieser Punkte zusammenfallen, oder daß mehr als zwei derselben auf der nämlichen Geraden liegen, wird die Form D spezialisieren oder identisch verschwinden lassen. Solcher Lagenspezialisierungen sind möglich:

1. zwei der Punkte, etwa A_1 und A_2, rücken zusammen unter Zugrundelegung einer Fortschreitungsrichtung von A_1 nach A_2: f und φ berühren sich einfach;

2. drei der Grundpunkte, etwa A_1, A_2, A_3, rücken zusammen unter Bestimmung zweier unendlich benachbarter Fortschreitungsrichtungen von A_1 nach A_2 und von A_2 nach A_3: f und φ haben eine Berührung zweiter Ordnung (Oskulation);

3. je zwei der Grundpunkte, etwa A_1 und A_2, wie A_3 und A_4 rücken zusammen unter Festsetzung je einer bestimmten Fortschreitungsrichtung von A_1 nach A_2 und einer solchen von A_3 nach A_4: f und φ berühren sich zweimal einfach; ein Kegelschnitt des Büschels artet als Ordnungskegelschnitt doppelt aus, also ist das Büschel zugleich Schar;

4. alle vier Punkte rücken zusammen unter Bestimmung unendlich benachbarter Fortschreitungsrichtungen von A_1 nach A_2, von A_2 nach A_3, von A_3 nach A_4: f und φ haben eine Berührung dritter Ordnung (Hyperoskulation), ein Kegelschnitt des Büschels artet wieder zu einem zusammenfallenden Geradenpaar aus, das Büschel ist gleichzeitig wieder Schar;

5. drei der Punkte A_i oder alle vier liegen auf der gleichen Geraden.

Nun läßt sich geometrisch durch eine Grenzbetrachtung sehr leicht nachweisen, daß in den Fällen 1. und 2. nur ein Polardreieck existiert, wenn es auch ein uneigentliches ist; indes soll hier nur die analytische Bedingung, $D = u_d^3$ darf nicht identisch verschwinden, aufgestellt werden.

Seien im Fall 1. (Fig. 1) durch $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $T_2 = 0$ bezw. definiert die Geraden $A_1 A_3$, $A_1 A_4$, $A_3 A_4$ und durch $T_1 = 0$ die Fortschreitungsrichtung von A_1 nach A_2, die natürlich für alle V_λ Tangente sein muß, so ist das Büschel dargestellt durch

$$\lambda_1 S_1 S_2 - \lambda_2 T_1 T_2 = 0$$

für ein beliebiges Koordinatensystem oder bei spezieller Wahl desselben, wenn man die Geraden T_1, T_2 zur x_1 und x_2 Achse nimmt, als x_3 Achse aber den vierten harmonischen Strahl zu dem Tripel T_1, S_1, S_2, durch

(31) $$\lambda_1 (x_1^2 - x_3^2) + 2 \lambda_2 x_1 x_2 = 0,$$

oder in Linienkoordinaten durch

$$\Theta \lambda^2 u_\vartheta^2 = 2 [2 \lambda_1 \lambda_2 u_1 u_2 - \lambda_1^2 u_2^2 - \lambda_2^2 u_3^2].$$

wodurch dann für die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$$f = a_x^2 = x_1^2 - x_3^2,$$
$$u_\alpha^2 = -2 u_2^2$$

und für die Wahl $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$$\varphi = b_x^2 = 2 x_1 x_2$$
$$u_\beta^2 = -2 u_3^2.$$

Damit wird

$$4 N_x^2 u_n = 4 u_2 (x_1 x_3 - x_2 x_3) + 4 u_3 x_1^2,$$
$$2 N_\alpha N_\beta u_n = u_2 (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) + 2 u_3 \alpha_1 \beta_1.$$

und

$$D = (abu)\, a_\beta b_\alpha u_\alpha u_\beta = -4 u_2^2 u_3.$$

Das Polardreieck besteht also hier aus dem doppelt zählenden Punkt A_1 und dem Schnittpunkt T_1 mit T_2.

Im Fall 2. ist das Kegelschnittbüschel bestimmt durch die Gleichung

$$\lambda_1 S + 2 \lambda_2 T_1 T_2 = 0.$$

Dabei berührt der Kegelschnitt S (Fig. 2) die Gerade $T_1 = 0$ in den drei unendlich benachbarten Punkten A_1, A_2 und A_3 und geht ferner durch den Punkt A_4 auf T_2; $T_2 = 0$ bestimmt die Gerade von A_1 nach A_4. Bei spezieller Wahl des Koordinatensystems, wenn man T_1 zur x_1, T_2 zur x_3-Achse und die

Tangente an S in A_4 zur x_2-Achse macht, ist das Büschel bestimmt durch

(32) $$\lambda_1 (2 x_1 x_2 + x_3^2) + 2 \lambda_2 x_1 x_3 = 0$$

oder in Linienkoordinaten

$$\Theta \lambda^2 u_\vartheta^2 = 2 [- 2 \lambda_1^2 u_1 u_2 - \lambda_2^2 u_2^2 + 2 \lambda_1 \lambda_2 u_2 u_3 - \lambda_1^2 u_3^2] .$$

Die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ gibt

$$f = a_x^2 = 2 x_1 x_2 + x_3^2$$
$$u_\alpha^2 = - 2 (2 u_1 u_2 + u_3^2) ,$$

diejenige $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$$\varphi = b_x^2 = 2 x_1 x_3$$
$$u_\beta^2 = - 2 u_2^2 .$$

Nun wird wieder

$$N_x^2 u_n = u_1 x_1^2 + u_2 (x_3^2 - x_1 x_2) - u_3 x_1 x_3 ,$$

und damit

$$D = 2 N_\alpha N_\beta u_n u_\alpha u_\beta = - 4 u_2^3 .$$

Hier besteht das Polardreieck aus dem dreifach zählenden Punkt A_1.

Wesentlich verschieden von beiden behandelten Fällen sind die folgenden, weil für sie $D \equiv 0$. Im Fall 3, wo f und φ sich zweimal in zwei verschiedenen Punkten berühren, ist die Darstellung des Büschels bei passender Wahl des Koordinatendreiecks (Fig. 3)

(33) $$2 \lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_3^2 = 0$$

oder in Linienkoordinaten

$$\Theta \lambda^2 u_\vartheta^2 = - 2 \lambda_1 [2 \lambda_2 u_1 u_2 + \lambda_1 u_3^2]$$

d. h. das Büschel ist gleichzeitig Schar. Für die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ wird $f = a_x^2 = 2 x_1 x_2$ das gemeinsame Tangentenpaar (x_3 die Berührsekante), also $u_\alpha^2 = -2 u_3^2$, für die Wahl $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

$$\varphi = b_x^2 = 2 x_1 x_2 + x_3^2$$
$$u_\beta^2 = - 2 (2 u_1 u_2 + u_3^2) .$$

Es wird wieder

$$N_x^2 u_n = u_1 x_1 x_3 - u_2 x_2 x_3 ,$$

und

$$D = 2 N_\alpha N_\beta u_n u_\alpha u_\beta \equiv 0 .$$

Damit verschwindet der erste Summand der Form (29) identisch; selbstverständlich auch der zweite, wie hier analytisch

gezeigt wird. Allgemein ist ja leicht einzusehen, auch schon S. 6 angedeutet worden, warum C_6 für Fall 3. 4. identisch verschwindet. Wegen

$$\begin{aligned} a_\alpha{}^2 &= 2\alpha_{12} = 0 = A_{111}, \\ b_\alpha{}^2 &= 2\alpha_{12} + \alpha_{33} = -2 = A_{112}, \\ a_\beta{}^2 &= 2\beta_{12} = -4 = A_{122}, \\ b_\beta{}^2 &= 2\beta_{12} + \beta_{33} = -6 = A_{222} \end{aligned}$$

wird

$$\begin{aligned} (\tau A)^2 &= -8(\varphi^2 - f\varphi + f^2) = -8x_3{}^4 \\ \psi &= 3(\alpha\beta x)^2 - 2(A_{112}\varphi + A_{122}f) \\ &= 4x_3{}^2 \end{aligned}$$

und damit der zweite Summand von (29)

$$l_x{}^2 = \tfrac{1}{3}[\psi^2 + 2(\tau A)^2] = 0.$$

Dieselben Entwicklungen ergeben für den Fall 4, dargestellt durch Fig. 4, wenn man die Tangente T, die allen Kegelschnitten des Büschels $\lambda_1 S - \lambda_2 T^2$ gemeinsam ist, als x_3-Achse, eine zweite Tangente an S als x_2-Achse und die Berührsekante als x_1-Achse einführt, als Gleichung des Büschels

34) $$\lambda_1(x_1{}^2 + 2mx_2x_3) + \lambda_2 x_3{}^2,$$

oder in Linienkoordinaten

$$\Theta\lambda^2 u_\vartheta{}^2 = -2\lambda_1[\lambda_1 m^2 u_1{}^2 - \lambda_2 u_2{}^2 + 2\lambda_1 m u_2 u_3],$$

also für die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$

$$f = a_x{}^2 = x_1{}^2 + 2mx_2x_3, \quad u_\alpha{}^2 = -2(m^2 u_1{}^2 + 2m u_2 u_3)$$

und für die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$

$$\varphi = b_x{}^2 = x_1{}^2 + 2mx_2x_3 + x_3{}^2, \quad u_\beta{}^2 = -2(m^2 u_1{}^2 + 2m u_2 u_3 - u_2{}^2).$$

Es wird

$$N_x{}^2 u_n = u_1 m x_3{}^2 - u_2 x_1 x_3,$$

und

$$D = 2N_\alpha N_\beta u_n u_\alpha u_\beta = 0.$$

Wegen $A_{111} = A_{112} = A_{122} = A_{222} = -6m^2$ wird

$$\begin{aligned} (\tau A)^2 &= 0; \\ (\alpha\beta x)^2 &= -4m^2(f + \varphi) \end{aligned}$$

und damit

$$\psi = 3(\alpha\beta x)^2 - 2(A_{112}\varphi + A_{122}f) = 0$$

also auch

$$l_x^2 = \tfrac{1}{3}\,[\psi^2 + 2(\tau\Delta)^2] \quad 0\,.$$

Liegen im Falle 5. A_1, A_2, A_3 auf der Geraden c_x, A_4 aber nicht, so wird für ein beliebiges Koordinatendreieck das Kegelschnittbüschel dargestellt durch

(35) $$\lambda_1 c_x d_x + \lambda_2 c_x e_x = 0$$

oder

$$c_x \cdot l_x = 0$$

für

$$l = \lambda_1 d + \lambda_2 e\,,$$

wenn d_x und e_x beliebige Gerade durch A_4 sind, in Linienkoordinaten durch

$$\Theta_\lambda^2 u_\vartheta^2 = -2(clu)^2$$
$$= -2[\lambda_1 (cdu) + \lambda_2 (ceu)]^2.$$

Die Wahl $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$, bezw. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ macht

$$f = a_x^2 = c_x d_x\,, \qquad u_\alpha^2 = -2(cdu)^2$$
$$\varphi = b_x^2 = c_x e_x\,, \qquad u_\beta^2 = -2(ceu)^2$$

also für $\varrho = \frac{1}{\sqrt{-2}}$

$$\alpha = \varrho \cdot \overline{cd}$$
$$\beta = \varrho \cdot \overline{ce}\,.$$

Damit wird

$$N_x^2 u_n = c_x^2 (deu) + c_x e_x (dcu) + c_x d_x (ceu)$$

und wegen $c_\alpha = 0$, $c_\beta = 0$

$$2 N_\alpha N_\beta u_n \equiv 0\,,$$

also auch

$$D = 2 N_\alpha N_\beta u_\alpha u_\beta u_n \equiv 0\,.$$

Aber, um diesen Fall gleich vorweg zu nehmen, C_6 verschwindet nicht identisch — denn die Möglichkeit, immer nur bestimmte Tangenten an die einzelnen Kegelschnitte des Büschels zu legen und dadurch bestimmte Ortspunkte zu erhalten, ist so lange gegeben, als nicht einer der Büschelkegelschnitte oder der feste selbst zu einem Paar zusammenfallender Geraden ausartet.

Mit $D \equiv 0$ artet C_6 aus zu

$$C_6 = \tfrac{1}{9} S[\psi^2 + 2(\tau A)^2] \qquad (29)$$

Da

$$A_{111} = 0,\ A_{112} = 0,\ A_{122} = 0,\ A_{222} = 0$$

wird

$$(\tau A)^2 = 0 \qquad (27\,d),$$

also

$$C_6 = \tfrac{1}{9} S \psi^2,$$

wobei ψ^2 sich noch darstellen läßt als c_x^4, versehen mit einem Zahlenfaktor. Denn

$$(\alpha \beta x)^2 = \varrho^2 (\overline{c\,d}\ \overline{c\,e}\, x)^2 = \tfrac{1}{2} c_x^2 (c\,d\,e)^2,$$

also

$$4 C_6 = S c_x^4 (c\,d\,e)^2 \qquad (36)$$

C_6 zerfällt also für den gekennzeichneten Fall, was ja geometrisch sofort evident ist, in den festen Kegelschnitt S und die vierfach zählende Punktreihe c_x.

Liegt auch noch der Punkt A_4 auf der gleichen Geraden, so fällt in Gleichung (36) nur die Bedingung weg, daß d_x und e_x sich in A_4 schneiden.

Fall 3. und Fall 4. definieren das Büschel gleichzeitig als Schar. Dann ist von vornherein als Ordnung der Kurve die dritte zu erwarten, d. h. C_6 degeneriert in

$$C_6 = C_3 \cdot C'_3,$$

in zwei Kurven dritter Ordnung, deren eine identisch verschwindet.

Analytisch: In der Form F_λ^2 muß sich ein von den u unabhängiger Faktor l_λ ausscheiden lassen,[1]) so daß (wie in den speziellen Fällen auch schon gezeigt),

$$\Theta_\lambda^2 u_\vartheta^2 = l_\lambda K_\lambda u_\varkappa^2, \qquad (37)$$

wo dann wieder die binären Symbole K nur in Verbindung mit den ternären $\varkappa$ wirkliche Faktoren schaffen können. Die Funktionaldeterminante von

---

[1]) Clebsch-Lindemann S. 298.

$$l_\lambda K_\lambda (\varkappa\sigma\xi)\, u_\varkappa u_\sigma \qquad (11)$$

$$[l_\lambda K_\lambda (\varkappa\sigma\xi)\, u_\varkappa u_\sigma]_v \qquad (12)$$

wird hier

(38) $$\Delta_\lambda{}^2 u_\delta{}^2 = \tfrac{1}{2} l_\lambda{}^2 (KK_1)(\varkappa\sigma\xi)(\varkappa_1\sigma_1\xi) u_{\varkappa_1} u_{\sigma_1} (u_\varkappa v_\sigma + u_\sigma v_\varkappa),$$

geht also in den wirklichen Faktor $l_\lambda{}^2$ über. Die Entwicklung von $\Delta_\lambda{}^2 u_\delta{}^2$ auf S. 13 liefert hier mit

(39) $$P_\lambda{}^2 u_p{}^2 = l_\lambda{}^2 (KK_1)(\varkappa\varkappa_1\xi)\, u_k u_{\varkappa_1}, \qquad (14\,b)$$

(40) $$4\Delta_\lambda{}^2 u_\delta{}^2 = l_\lambda{}^2 (p\sigma\xi)^2 u_{\sigma_1}{}^2 \qquad (14)$$

Da $l_\lambda{}^2$ das wirkliche Quadrat von l_λ ist, verschwindet die Diskriminante von $\Delta_\lambda{}^2 u_\delta{}^2$, nämlich

$$C_6 = (PP_1)^2 (p\sigma\xi)^2 (p_1\sigma_1\xi)^2 = (ll_1)^2 \cdot (p\sigma\xi)^2 \cdot (p_1\sigma_1\xi)^2$$

identisch. Aber $(p\sigma\xi)^2$ wie $(p_1\sigma_1\xi)^2$ sind diesmal wirkliche Faktoren (jeder vom dritten Grad in ξ, wie weiter unten bewiesen). In der Tat erweist sich $(p\sigma\xi)^2$ nach (14) als Funktionaldeterminante von

$$K_\lambda (\varkappa\sigma\xi)\, u_\varkappa u_\sigma$$

$$[K_\lambda (\varkappa\sigma\xi)\, u_\varkappa u_\sigma]_v$$

d. h. durch sein Verschwinden als Bedingung, daß die Formen (11) und (12) außer l_λ noch einen von u und v unabhängigen Faktor gemeinsam haben. Damit ist die kanonische Form wieder mit

$$C_6 = (PP_1)^2 (p\sigma\xi)^2 (p_1\sigma_1\xi)^2$$

hier

(41) $$C_6 = (p\sigma\xi)^2 (p_1\sigma_1\xi)^2 = C_3 \cdot C'_3$$

hergestellt.

Die Reduktion auf das Formensystem von f und φ ergibt sich folgendermaßen:

$$K_\lambda u_\varkappa{}^2 = \lambda_1 u_\alpha{}^2 + \lambda_2 u_\beta{}^2,$$

also

$$K_{1\lambda} u_{\varkappa_1} v_{\varkappa_1} = \lambda_1 u_{\alpha_1} v_{\alpha_1} + \lambda_2 u_{\beta_1} v_{\beta_1}.$$

Aus der Funktionaldeterminante beider Formen

$$(KK_1) u_\varkappa{}^2 u_{\varkappa_1} v_{\varkappa_1} = u_\alpha{}^2 u_{\beta_1} v_{\beta_1} - u_\beta{}^2 u_{\alpha_1} v_{\alpha_1}$$

wird

(42)
$$\begin{aligned} u_p^2 &= (KK_1)\, u_\varkappa u_{\varkappa 1} (\varkappa\varkappa_1 x) \\ &= 2\, u_\alpha u_\beta (\alpha\beta x) \\ &= 2\, N_\nu u_\nu^2 = 2N. \end{aligned}$$

$C_3 = (p\sigma x)^2$, wenn man wieder x statt ξ für den Ortspunkt setzt, erhält man aus u_p^2 für $u = \overline{\sigma x}$, also

$$\begin{aligned} C_3 &= 2\,(\alpha\sigma x)\,(\beta\sigma x)\,(\alpha\beta x) \\ &= 2\, N_x (\nu\sigma x)^2 \end{aligned} \tag{43}$$

An einem Beispiel soll veranschaulicht werden, wie tatsächlich C_6 in zwei Kurven $C_3 \cdot C'_3$ degeneriert, deren eine identisch verschwindet.

Jede Gerade der Ebene wird von einem wirklichen Kegelschnitt des Büschels $2\lambda_1 x_1 x_2 + \lambda_2 x_3^2 = 0$ (S. 23) berührt, für den also λ_1 von Null verschieden ist, sowie von der Doppelgeraden $\lambda_1 = 0$. Die Wahl $\lambda = \mu$ bezw. $\lambda = \nu$ (μ_1 und ν_1 von Null verschieden), macht

$$a_x^2 = 2\mu_1 x_1 x_2 + \mu_2 x_3^2, \quad u_\alpha^2 = -2\mu_1 (2\mu_2 u_1 u_2 + \mu_1 u_3^2)$$
$$b_x^2 = 2\nu_1 x_1 x_2 + \nu_2 x_3^2, \quad u_\beta^2 = -2\nu_1 (2\nu_2 u_1 u_2 + \nu_1 u_3^2)$$

und damit

$$\alpha_{12} = -2\mu_1\mu_2, \quad \alpha_{33} = -2\mu_1^2$$
$$\beta_{12} = -2\nu_1\nu_2, \quad \beta_{33} = -2\nu_1^2,$$

so daß

$$N = 8\mu_1\nu_1 (\mu\nu)\, u_3 (u_2 x_2 - u_1 x_1)$$

und damit für die wirklichen berührenden Kegelschnitte

$$\begin{aligned} C_3 &= 8\mu_1\nu_1 (\nu\mu)\,(\sigma x)_3 [x_1 (\sigma x)_1 - x_2 (\sigma x)_2] \\ &= 8\mu_1\nu_1 (\nu\mu) [2\sigma_{23} x_1^2 x_2 - \sigma_{22} x_1^2 x_3 - 2\sigma_{13} x_1 x_2^2 + \sigma_{11} x_2^2 x_3]. \end{aligned} \tag{44}$$

$C'_3 = 0$ erhält man immer für die Wahl $\mu_1 = 0$ oder $\nu_1 = 0$.

§ 7.

Diskussion der Ortskurve.

Für den Fall allgemeinster Lage der vier Grundpunkte und des festen Kegelschnitts lassen sich eine Reihe von Eigenschaften unschwierig aus den bisher abgeleiteten Gleichungen

bezw. aus den in ihnen auftretenden Formen ableiten. Dabei ist in erster Linie an die Formen S_i der Gleichung

$$(12)\, x_1 x_2 S_1 S_2 + (23)\, x_2 x_3 S_2 S_3 + (31)\, x_3 x_1 S_3 S_1 = 0$$

gedacht, deren erste Festsetzung Gleichung (9) lieferte. Ausgangspunkt der Untersuchung ist das nicht ausartende Polardreieck zwischen V und V'. Nach (3) geht S_i durch die Ecken u_j und u_k desselben; weiter gibt diese Gleichung die Tangente an S_i in u_j mit

$$\sigma_{ij} x_i - \sigma_{ii} x_j = 0$$

an, also mit der x_i-Achse vereinigt das Paar

$$\sigma_{ij} x_i^2 - \sigma_{ii} x_j x_i = 0\,,$$

während das Tangentenpaar von u_k aus an den festen Kegelschnitt durch

$$\sigma_{jj} x_i^2 - 2\,\sigma_{ij} x_i x_j + \sigma_{ii} x_j^2 = 0$$

dargestellt wird. Beide Paare erfüllen die Bedingung harmonischer Lage zweier Linienpaare

$$A x_1^2 + 2B x_1 x_2 + C x_2^2 = 0\,,$$
$$A' x_1^2 + 2B' x_1 x_2 + C' x_2^2 = 0\,,$$

nämlich $AC' + A'C = 2BB'$.

Die Einführung der Cayley'schen Sprechweise läßt dann, unter Festsetzung von S als absolutem Kegelschnitt, die Tangente in u_k an S_i als Vertikale zur x_i-Achse bezeichnen: „S_i steht in u_j und u_k auf x_i senkrecht." Nun schneidet S_i die Seite x_j nochmals im Punkt f_j mit den Koordinaten $x_i = \sigma_{ji}$, $x_j = 0$, $x_k = \sigma_{jk}$, nach der Sprechweise von Cayley „im Fußpunkt des von u_j auf x_j gefällten Lotes", wie an Hand der Skizze der Figur 5 erwiesen wird. Die Polaren

$$G_i = s_{i1} x_1 + s_{i2} x_2 + s_{i3} x_3\,,$$
$$G_k = s_{k1} x_1 + s_{k2} x_2 + s_{k3} x_3$$

schneiden sich im Punkt $F_j = \sigma_{j1} \mid \sigma_{j2} \mid \sigma_{j3}$ d. h. im Pol der Geraden x_j für S. Im Cayley'schen Sinn ist dann $F_j u_i$ wie $F_j u_k$, allgemein jede Gerade durch F_j eine „Vertikale zu x_j", also auch die Gerade $F_j f_j$. Diese Gerade $F_j f_j$ mit der Gleichung

$$\sigma_{ji} x_k - \sigma_{jk} x_i = 0$$

geht nun aber auch durch u_j und repräsentiert sich damit als die „Höhe von u_j auf x_j“, d. h. f_j ist der „Fußpunkt dieser Höhe“.

Gleichung (9) läßt S_i durch die Schnittpunkte von S mit G_j wie G_k, im Cayley'schen Sinn durch die dem absoluten Kegelschnitt S sowie den um u_j einerseits und u_k andrerseits beschriebenen „Kreisen“ gemeinsamen Punkte hindurchgehen.

Die vorausgehenden Betrachtungen ergeben zusammengefaßt, in der neuen Sprechweise:

S_i schneidet das V und V′ gemeinsame Polardreieck in den Ecken u_j, u_k und steht dort auf x_i senkrecht; ferner in den Fußpunkten f_j und f_k der von u_j und u_k aus auf x_j bezw. x_k gefällten Lote; S_i schneidet den absoluten Kegelschnitt S in den Punkten, die dieser einerseits mit den Kreisen um u_j und andrerseits mit den Kreisen um u_k gemeinsam hat.

Eine weitere Beziehung verknüpft die S_i mit den Doppelpunkten der Ortskurve; diese aufzufinden, wird folgende geometrische Überlegung erleichtern. Geht nämlich der feste Kegelschnitt durch alle vier Grundpunkte A_i, ist er also selber von der Form $V + \lambda V'$, so wird nach (9)

$$\alpha_i S_i = G_j G_k = x_j x_k$$

und damit

$$\alpha C_6 = x_1^2 x_2^2 x_3^2 ,$$

die Ortskurve zerfällt in die doppelt zählenden Seiten des Polardreiecks. Damit ist bewiesen: Das Tangentenpaar von einem Punkt einer der drei Polardreiecksseiten des Büschels an irgend einen Kegelschnitt V_1 dieses Büschels ist gleichzeitig Tangentenpaar an einen zweiten bestimmten V_2 desselben Büschels. Und umgekehrt: Der Ort der Punkte, von welchen aus das Tangentenpaar an einen Kegelschnitt des Büschels $V_\lambda = V + \lambda V'$ identisch ist mit dem Tangentenpaar an einen zweiten Kegelschnitt desselben Büschels, ist gebildet durch die drei Seiten des dem Büschel zugeordneten Polardreiecks. Dieser Satz gibt in sehr schöner Weise die Doppelpunkte der Ortskurve an; denn für einen solchen gilt: Das Tangentenpaar von ihm aus an $S = 0$

muß identisch sein mit dem Tangentenpaar an einen Kegelschnitt V_1 des Büschels $V_\lambda = V + \lambda V'$ und noch an einen zweiten V_2. Damit sind die Doppelpunkte der „Brennpunktskurve“ als die Schnittpunkte derselben mit dem Polardreieck erwiesen; oder nach (3) als die Schnittpunkte von S_i mit den Polardreieckseiten. Die Kurve hat sechs Doppelpunkte, erstens die drei Ecken u_1, u_2, u_3, dann die Punkte $f_1 = 0 \mid \sigma_{12} \mid \sigma_{13}$, $f_2 = \sigma_{21} \mid 0 \mid \sigma_{23}$, $f_3 = \sigma_{31} \mid \sigma_{32} \mid 0$.

Daß diese Punkte eigentliche Doppelpunkte sind und keine weitere Singularität mehr enthalten, ergibt sich aus der analytischen Darstellung der Tangentenpaare in ihnen; dasjenige in u_1

$$\sigma_{12} x_1^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22}) x_1 x_2 + \sigma_{12} x_2^2 = 0,$$

stellt nur für bestimmte Relationen zwischen σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} eine höhere Singularität dar, ebenso natürlich das Tangentenpaar in u_2 und u_3. Dasjenige im Doppelpunkt f_3 ist definiert durch

$$\sigma_{13} x_2 = \sigma_{23} x_1 + \sigma_{13} \nu x_3,$$

wobei ν der Gleichung

$$\nu^2 \sigma_{13}^3 \sigma_{23} + \nu \sigma_{13} [\sigma_{13}^2 (\sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma_{23}^2 (\sigma_{11} + \sigma_{33})]$$
$$+ [\sigma_{12} \sigma_{13}^2 (\sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma_{13} \sigma_{23} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33})$$
$$+ \sigma_{12} \sigma_{23}^2 (\sigma_{11} + \sigma_{33})] = 0$$

genügt: damit ist wieder die Existenz bestimmter Annahmen der σ_{ik} als Bedingung höherer Singularitäten gezeigt, ebenso natürlich auch für die Doppelpunkte f_1 und f_2.

Nach den Erörterungen der vorhergehenden Zeilen sind die Doppelpunkte f_1', f_2, f_3 in der neuen Sprechweise die „Fußpunkte der Polardreieckshöhen.“

Die Verbindungsgeraden $f_i u_i$ schneiden sich in einem Punkt, $\sigma_{12} \sigma_{13} \mid \sigma_{21} \sigma_{23} \mid \sigma_{31} \sigma_{32}$, der als „Höhenschnittpunkt“ des Polardreiecks angesprochen werden muß.

Das Tangentenpaar der Kurve im Doppelpunkt u_i

$$\sigma_{ij} x_i^2 - (\sigma_{ii} + \sigma_{jj}) x_i x_j + \sigma_{ij} x_j^2 = 0$$

läßt gegenübergestellt dem Tangentenpaar an S von diesem Punkt u_i aus,

$$\sigma_{jj}\, x_i^2 - 2\,\sigma_{ij}\, x_i\, x_j + \sigma_{ii}\, x_j^2 = 0,$$

erkennen, daß beide Paare konjugiert harmonisch sind: im Cayley'schen Sinn stehen die Tangenten in u_i an die Ortskurve aufeinander senkrecht.

Noch eines lehrt die Angabe der sechs Doppelpunkte, bezw. ihrer Koordinaten, die ja unabhängig von den Koeffizienten der das Büschel bestimmenden Kegelschnitte sind: Alle Büschel mit dem gleichen Polardreieck lassen Ortskurven mit den nämlichen Doppelpunkten u_i und f_i entstehen.

Auf die mehrfachen Tangenten hat Darboux bereits hingewiesen. Daß die von den Grundpunkten A_i aus an S gezogenen Tangenten dreifache Tangenten der Ortskurve sind, ist leicht einzusehen; denn da jede beliebige Tangente g an S von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt wird, so werden jedesmal sechs getrennt liegende Kurvenpunkte auf einer solchen Geraden entstehen, allgemeine Lage vorausgesetzt. Geht aber die Tangente g durch A_i, so wird der in A_i diese Tangente berührende Kegelschnitt für diese Gerade doppelt zu zählen sein und damit auch jeder der drei durch die gemeinsamen Tangenten entstehenden Kurvenpunkte, doppelt aber nur in Richtung von g, d. h. letztere berührt C_6 dreimal.

Die Plücker'schen Zahlen ergeben sich aus der bekannten Zahl der Doppelpunkte und der Ordnung der Kurve mit

$$\begin{array}{lll} \mu = 6 & \delta = 6 & \varkappa = 0 \\ \nu = 18 & \mathrm{i} = 36 & \tau = 96, \end{array}$$

wenn μ die Ordnung, ν die Klasse, δ die Zahl der Doppelpunkte, $\varkappa$ die der Spitzen, i der Wendepunkte und τ der Doppeltangenten angibt. Unter letzteren sind die eben erwähnten acht dreifachen Tangenten je dreimal zu zählen, so daß außer ihnen noch 72 Doppeltangenten existieren. Mit diesen Zahlen ist das Geschlecht der Kurve $p = 4$ bestimmt.

Eine vollständige Diskussion der Spezialfälle wird am besten folgende Gruppierung schaffen:

I. Die drei Linearfaktoren von $D = u_d^3$ sind verschieden und S ist
   a) ein wirklicher b) ein ausartender Kegelschnitt;

II. Zwei oder drei der Linearfaktoren von D sind gleich und S ist a) ein wirklicher, b) ein ausartender Kegelschnitt;

III. D verschwindet identisch, S ist a) ein wirklicher, b) ein ausartender Kegelschnitt.

Innerhalb einer jeden dieser Gruppen wird dann eine neue Unterscheidung geben die mehr oder minder spezialisierte Lage von S sowohl gegenüber den vier Punkten A_i und dem durch sie bestimmten Polardreieck wie auch gegenüber den wirklichen oder zerfallenden Elementen des Kegelschnittbüschels.

In den folgenden Zeilen sind nur Spezialisierungen des Falles I a und I b behandelt; einer weitern Diskussion bieten die Fälle II und III nach Besprechung der ersten Gruppe keine Schwierigkeiten.

§ 8.

Diskussion von Spezialfällen, wenn D drei verschiedene Linearfaktoren hat; S artet nicht aus.

Hier wie im folgenden Paragraphen stützt sich die Diskussion auf die Gleichung (4) und die in ihr auftretenden Formen S_i.

a) Wenn A_i ein Punkt von S, so wird die Tangente g in ihm an S von einem doppelt zu zählenden Kegelschnitt V_λ berührt (Figur 7), weshalb jeder Punkt auf g in der Richtung von g doppelt zu zählen ist; die beiden andern Tangenten h und k zwischen S und V_λ erhalten einmal den gemeinsamen Schnittpunkt, dann noch je einen doppelt zu zählenden Punkt durch den Schnitt mit g. Jeder dieser Schnittpunkte auf g charakterisiert sich daher, da er in beiden Tangentenrichtungen doppelt zu zählen ist, als Doppelpunkt. Der dritte Punkt auf g wird einfacher Berührpunkt.

Der Fall S geht durch einen der Grundpunkte A_i ist dadurch charakterisiert, daß die Jakobi'sche Kurve $B = 0$ des Netzes $\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 S$ in jenem Punkt einen Doppelpunkt hat.

b) Liegen A_1 und A_2 auf S, so muß naturgemäß die Jakobi'sche Kurve in A_2 einen weitern Doppelpunkt erhalten

und damit zerfallen: sie artet in einen Kegelschnitt und in eine Gerade aus, beide durch A_1 und A_2 gehend.

Zu den acht Doppelpunkten des vorigen Falles treten nach der gleichen Entwicklung wie dort zwei weitere hinzu. Die Kurve würde dann mit zehn Doppelpunkten die Maximalzahl erreicht haben.

Darboux hat bereits auf die Spezialisierung hingewiesen, die eintritt, wenn der Reihe nach zwei, drei oder vier Grundpunkte auf S rücken. Gerade der Fall: zwei der Grundpunkte auf S, wurde wiederholt in den „Nouvelles Annales“ behandelt.[1]) Und zwar in der speziellen Fassung: gegeben auf einem Kegelschnitt zwei Punkte A_1 und A_2, durch die ein Kreisbüschel bestimmt ist: gesucht die Kurve der Schnittpunkte der dem festen Kegelschnitt und je einem Büschelkreis gemeinsamen Tangenten. A_3 und A_4 sind durch diese Fassung als die unendlich fernen Kreispunkte definiert. Chasles und Macé de Lepinay sowie ihre Vorgänger hatten von den vier gemeinsamen Tangenten zwischen V_λ und S immer nur ein bestimmtes Paar zum Schnitt gebracht, jenes nämlich, für welches die Berührsekanten sich auf A_1 A_2 schneiden und als Ortskurve einen mit S homofokalen Kegelschnitt gefunden. Le Cointe wies zuerst auf die Unvollständigkeit der Lösung hin und zeigte, daß neben diesem Kegelschnitt noch eine Kurve vierter Ordnung auftrete, wenn man keine der vier gemeinsamen Tangenten bevorzuge. Darboux stellte dann die allgemeinste Form des Problems auf und gab die eingangs dieser Schrift zitierte Gleichung an. Aus ihr leitete er dann analytisch für den Fall: A_1 und A_2 auf S ab, daß $C_6 = C_2 \cdot C_4$. In der Tat läßt sich durch eine Lineartransformation der Ebene, die die Punkte A_3 und A_4 zu den unendlich fernen Kreispunkten macht, die allgemeine Aufgabe auf den vielbehandelten erwähnten Fall zurückführen.[2])

---

[1]) Nouv. Ann. I. serie 1851 pag. 408 (Chasles); Nouv. Ann. II. serie 1880 pag. 91 (Macé de Lepinay); Nouv. Ann. II. serie 1880 pag. 122 (Le Cointe).

[2]) vgl. hierzu Anhang S. 49.

c) Wird S die weitere Bedingung auferlegt, daß er auch noch durch einen dritten Punkt A_i gehen soll, so wird sich die Jakobi'sche Kurve weiterhin spezialisieren: sie artet in drei Gerade aus, deren jede durch zwei der Punkte A_1, A_2, A_3 geht. Ebenso zerfällt auch die Ortskurve; denn der die Tangente an S in A_3 berührende Kegelschnitt V_λ erzeugt durch die ihm mit S gemeinsamen Tangenten wiederum zwei Doppelpunkte auf der Tangente durch A_3. Die Kurve C_4, in die im vorigen Fall C_6 neben C_2 zerfiel, müßte jetzt vier Doppelpunkte haben, was nicht möglich ist (C_2 ein Geradenpaar ist ja nur für weitere Spezialisierungen zu erwarten); sie muß also zerfallen, und zwar in zwei Kegelschnitte. Jeden derselben erhält man nach den Überlegungen des vorigen Falles, wenn man von den vier gemeinsamen Tangenten immer die zwei auswählt, für welche die Berührsekanten sich auf der fixen Geraden $A_1 A_2$ bezw. $A_1 A_3$, $A_2 A_3$ schneiden. Die Schnittpunkte der drei Kegelschnitte liefern dann die zwölf aufgetretenen Doppelpunkte der Ortskurve. Jeder dieser Kegelschnitte muß dann das von A_4 aus an S gelegte Tangentenpaar (als dreifache Tangenten an C_6) doppelt berühren.[1])

d) Liegen die vier Grundpunkte A_i auf S, so zerfällt, wie schon S. 30 erwähnt, C_6 in die doppelt zählenden Seiten des Polardreiecks. Die Jakobi'sche Kurve verschwindet identisch: die bekannte Bedingung, daß alle drei Kurven f, φ, S dem gleichen Büschel angehören.

e) Eine Spezialisierung anderer Art tritt ein, wenn S einen der Kegelschnitte V_λ doppelt berührt, im Cayley'schen Sinn, wenn sich durch die vier Punkte A_i ein „Kreis" legen läßt. Es wird sich die Kurve dahin spezialisieren, daß sie einen weiteren Doppelpunkt D erhält, den „Mittelpunkt" des durch alle A_i gehenden „Kreises". Denn sowohl für das eine zusammenfallende Tangentenpaar g (Figur 8), wie für das andere h ist D doppelt zu zählen, muß also Doppelpunkt sein.

f) Die S auferlegte Bedingung, daß ein σ_{ik} seiner Gleichung verschwindet, i und k verschieden vorausgesetzt, d. h. daß x_i

[1]) vgl. hierzu Anhang S. 50.

und x_k konjugierte Gerade in bezug auf S sind, oder in der Cayley'schen Sprechweise, daß x_i und x_k „senkrecht“ sind, wird der Ortskurve einen dreifachen Punkt in der Ecke u_j zuweisen. Sei beispielshalber $\sigma_{23} = 0$, so werden die Doppelpunkte die Koordinaten annehmen

$$u_1 = 1|0|0 \qquad u_2 = 0|1|0 \qquad u_3 = 0|0|1$$
$$f_1 = 0|\sigma_{12}|\sigma_{13} \quad f_2 = \sigma_{21}|0|0 \qquad f_3 = \sigma_{31}|0|0,$$

d. h. die „Höhenfußpunkte“ f_2, f_3 fallen mit u_1 zusammen und bilden dort, wo das Polardreieck „rechtwinklig“ ist, den dreifachen Punkt. Die Ortskurve muß natürlich die beiden Polardreieckseiten in diesem dreifachen Punkt berühren, um der Bedingung zu genügen: sechs Schnittpunkte auf x_2 wie x_3.

g) Der erwähnte Fall, ein $\sigma_{ik} = 0$ läßt sich noch weiterhin spezialisieren durch die Annahme $s_{ij} = 0$ mit $s_{kj} = 0$; d. h. x_j ist die konstante Polare zu u_j, wie S auch sonst liegen mag; oder in der Cayley'schen Sprechweise, x_i steht „senkrecht“ zu x_j, ebenso x_k zu x_j, das Polardreieck ist bei u_i und u_k „rechtwinklig“. Die Ortskurve muß jetzt zerfallen, und zwar in die doppelt zählende Gerade x_j und eine Kurve C_4. Das läßt sich entweder analytisch zeigen, weil in diesem Fall $G_j = x_j$, $S_i = G_k x_j$, $S_k = G_i x_j$, $S_j = G_i G_k - s_{ik} S$ und damit

$$C_6 = x_j^2 [x_i x_k G_i G_k + x_i G_k S_j + x_k G_i S_j],$$

oder ebenso einfach geometrisch; denn mit $s_{ij} = 0$, $s_{kj} = 0$ wird gleichzeitig $\sigma_{ij} = 0$, $\sigma_{kj} = 0$, es müßten also alle drei Doppelpunkte f_1, f_2, f_3 nach zwei Ecken u_i und u_k des Polardreiecks fallen, und zwar paarweise; jede dieser zwei Ecken wäre dann ein dreifacher Punkt mit den Polardreieckseiten als Kurventangenten. Die Verbindungsgerade x_j von u_i mit u_k müßte also die Kurve in acht Punkten schneiden, d. h. die Kurve muß zerfallen in die doppelt zählende Gerade x_j und eine Kurve vierter Ordnung.

§ 9.

Diskussion von Spezialfällen, wenn D drei verschiedene Linearfaktoren hat; S artet aus.

h) Die Degeneration von S in ein Punktpaar veranlaßt wohl die wichtigste Spezialisierung der Kurve. Wie schon eingangs dieser Schrift erwähnt, geht die Kurve in die eigentliche „Brennpunktskurve“ über, wenn man die unendlich fernen Kreispunkte als spezielles Punktpaar annimmt.

Seien die Koordinaten der Punkte des Paares $P_1 = c_1 | c_2 | c_3$ und $P_2 = e_1\ e_2 | e_3$, so wird die Form des Punktpaares in Linienkoordinaten $u_\sigma^2 = u_c \cdot u_e$, wobei $\sigma_{ik} = c_i e_k + c_k e_i$, in Punktkoordinaten $S_x^2 = -2(cex)^2$. Da S als Klaßkegelschnitt ausartet, läßt sich, wie früher bereits angegeben, die durch (7) und (30) bestimmte Form der Ortskurve nicht mehr herstellen, wohl aber die Form (4) bezw. (5). Letztere hatten ja als Voraussetzung nur, daß D drei verschiedene Linearfaktoren hat. Form (29) setzt S als Klaßkegelschnitt voraus. Daraus folgt dann, daß die Ortskurve sowohl wie die in ihr auftretenden Formen alle die Eigenschaften, die aus den erwähnten Gleichungen abgeleitet wurden, behalten. Das sind aber alle, die bisher aufgestellt wurden. Denn wenn auch die Form (9), hervorgegangen aus einem Vergleich von (4) mit (7), identisch verschwindet, so bleibt doch die durch sie zum Ausdruck gebrachte Eigenschaft von S_i (S. 30) erhalten. Das läßt sich leicht entweder durch eine geometrische Grenzbetrachtung oder aber elementar-analytisch nachweisen: S_i geht durch P_1 und P_2. Damit stellt sich aber im Cayley'schen Sinn — der zu einem Punktpaar ausartende „absolute Kegelschnitt“ S definiert eine parabolische Maßgeometrie — S_i als „Kreis“ dar durch die Ecken u_j und u_k des Polardreiecks, in denen er „senkrecht“ zu x_i ist, und durch die „Höhenfußpunkte“ auf x_j und x_k. Die gestaltlichen Verhältnisse der Ortskurve sind diejenigen des allgemeinen Falles, nur spezialisiert. Zunächst hat die Ortskurve dieselben sechs Doppelpunkte u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3, für die genau dieselben Beziehungen gelten wie für die

des allgemeinen Falls, sie werden durch die drei „Kreise“ S_i auf den Polardreieckseiten ausgeschnitten. Zu diesen sechs Doppelpunkten der Kurve treten nun aber noch P_1 und P_2 als neue hinzu; denn die Entstehung der Ortskurve verlangt, daß P_1 wie P_2 für jede Gerade, die man durch sie hindurchlegt, doppelt gezählt werden müssen. Damit gehen dann die im allgemeinen Fall von A_i ausgehenden Tangentenpaare an S, hier die Verbindungsgeraden $P_1 A_i$ bezw. $P_2 A_i$ in Doppeltangenten über. Auch P_1 und P_2 sind eigentliche Doppelpunkte; die Richtung der Tangenten in ihnen an die Kurve ist direkt gegeben durch die beiden „Parabeln“ des Büschels, das sind jene beiden Büschelkegelschnitte V_λ und V'_λ, die die Gerade $P_1 P_2$ berühren (Fig. 9). Denn wenn V_λ die Gerade $P_1 P_2$ berührt, so fällt von den zwei Schnittpunkten, die sonst durch einen nichtberührenden Kegelschnitt außer P_1 noch auf der Tangente g erzeugt werden, noch einer nach P_1, es muß also P_1 für die Gerade g dreifach gezählt werden, also muß g die Ortskurve in P_1 berühren. Denn daß P_1 ein dreifacher Punkt wäre oder auch nur ein Rückkehrpunkt, ist nach den vorausgehenden Erörterungen, nach denen P_1 für beliebige Gerade durch ihn allgemein nur doppelt zu zählen ist, ausgeschlossen. Die vier von P_1 und P_2 ausgehenden Tangenten an die „Parabeln“ des Büschels sind gleichzeitig Tangenten an die Ortskurve in P_1 und P_2. Daß die Berührungspunkte der „Parabeln“ auf P_1 und P_2 auch Kurvenpunkte sind, ist ohne weiteres einzusehen. Die Kurve hat also acht eigentliche Doppelpunkte: u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3, P_1 und P_2. Sie ist damit vom Geschlecht $p = 2$ und von der Klasse 14; die Zahl der stationären Tangenten ist 24, ihrer Doppeltangenten 52.

Die Jakobi'sche Kurve des Netzes $\lambda_1 f + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 S$, nämlich

$$\begin{aligned} B = &\quad a_x b_x S_x \,(a b S) \\ = &- 2\,(c e x) \cdot a_x b_x \,(a b \overline{c e}) \\ = &- 2\,(c e x)\,[a_x a_e \cdot b_x b_e - a_x a_e \cdot b_x b_e]\,, \end{aligned}$$

artet aus in einen Kegelschnitt und die Verbindungsgerade $P_1 P_2$.

i) Geht $P_1 P_2$ durch A_i, so wird sich die Kurve dahin spezialisieren, daß die beiden Doppelpunkte P_1 und P_2 Spitzen

werden. Während im allgemeinen Fall immer zwei „Parabeln“ V_λ und V'_λ auftreten, gibt es jetzt nur eine, natürlich doppelt zählende; die Berührung selbst findet in A_i statt. Die beiden Tangenten g und i der Figur 9 an V_λ und V'_λ, gleichzeitig Ortstangenten in P_1, gehen jetzt in eine einzige über, P_1 muß Rückkehrpunkt werden. Ebenso verhält sich P_2. A_i selber wird dadurch Berührungspunkt auf P_1P_2.

k) Fällt P_1 auf A_i, so muß die Ortskurve in zwei identische Kurven dritter Ordnung zerfallen, denn je zwei der im allgemeinen Fall auf einer durch P_1 gehenden Geraden außer P_1 selbst noch entstehenden Punkte fallen in einen zusammen, da von P_1 aus das Tangentenpaar an V_λ zusammenfällt. Diese Spezialisierung ist mit folgender Aufgabe äquivalent: Von einem festen Punkt P_2 aus ziehe man an alle Kegelschnitte eines Büschels das Tangentenpaar und schneide dasselbe mit der jeweiligen Tangente des Büschelkegelschnitts in einem der Grundpunkte. Der Ort dieser Schnittpunkte muß eine Kurve dritter Ordnung ergeben, die doppelt gezählt die Ortskurve bildet. Die Beziehungen der beiden letztbesprochenen Fälle bleiben natürlich bestehen: dort waren die Tangenten von P_1 und P_2 aus an die doppelt zu zählende „Parabel“ Ortstangenten in diesen Punkten. Die Kurve berührt P_1P_2 in A_1, d. i. in P_1.

l) Bei dieser Gelegenheit sei die Frage aufgeworfen, unter welcher Bedingung die Ortskurve in zwei Kurven dritter Ordnung zerfällt. Da läßt sich nun sofort sagen: Die im allgemeinsten Fall: S ein beliebiger Kegelschnitt bereits bekannten Doppelpunkte $u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3$ müssen für $C_6 = C_3 \cdot C'_3$ Schnittpunkte von C_3 mit C'_3 werden. Denn die Möglichkeit, daß einer dieser Punkte Doppelpunkt von C_3 oder C'_3 wird, ist ausgeschlossen, da dann irgend eine der Geraden x_i auf C_3 oder C'_3 vier Punkte ausschneiden würde. Die beiden Kurven müssen also, da sie durch alle u_i gehen, von der Form sein

$$C_3 = a x_1^2 x_2 + b x_1^2 x_3 + c x_1 x_2^2 + d x_1 x_3^2 + e x_1 x_2 x_3 + f x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = 0,$$

$$C'_3 = \alpha x_1^2 x_2 + \beta x_1^2 x_3 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_1 x_3^2 + \varepsilon x_1 x_2 x_3 + \varphi x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 = 0.$$

Die Koeffizienten a, b, ... φ lassen sich nun bestimmen durch den Vergleich $C_3 \cdot C'_3 = \varrho C_6$ [C_6 nach (4) entwickelt]; daneben dient noch die Kenntnis, daß $f_1 = 0 \,|\, \sigma_{12} \,|\, \sigma_{13}$, $f_2 = \sigma_{21} \;\; 0 \,|\, \sigma_{23}$, $f_3 = \sigma_{31} \,|\, \sigma_{32} \,|\, 0$ beiden Gleichungen genügen. Macht man noch die an Allgemeinheit gegenüber S nicht verlierende Annahme

$$V_\lambda = \lambda_1 f + \lambda_2 \varphi = \lambda_1 (x_1^2 - x_3^2) + \lambda_2 (x_2^2 - x_3^2),$$

so daß

$$C_6 = x_1 x_2 S_1 S_2 + x_2 x_3 S_2 S_3 + x_3 x_1 S_3 S_1,$$

also alle $(ij) = 1$ werden, so wird die Entwicklung wesentlich vereinfacht. Dann wird

$$\begin{aligned} \sigma_{12}\sigma_{13} C_3 = &- \sigma_{12}\sigma_{23} c x_1^2 x_2 - \sigma_{13}\sigma_{23} d x_1^2 x_3 + \sigma_{12}\sigma_{13} c x_1 x_2^2 \\ &+ \sigma_{12}\sigma_{13} d x_1 x_3^2 - \sigma_{13}^2 x_2^2 x_3 + \sigma_{12}\sigma_{13} x_2 x_3^2, \\ \sigma_{12}\sigma_{13} C'_3 = &- \sigma_{12}\sigma_{23} \gamma x_1^2 x_2 - \sigma_{13}\sigma_{23} \delta x_1^2 x_3 + \sigma_{12}\sigma_{13} \gamma x_1 x_2^2 \\ &+ \sigma_{12}\sigma_{13} \delta x_1 x_3^2 - \sigma_{13}^2 x_2^2 x_3 + \sigma_{12}\sigma_{13} x_2 x_3^2. \end{aligned}$$

Erwähnenswert ist, daß der „Höhenschnittpunkt" $\sigma_{12}\sigma_{13}|\sigma_{21}\sigma_{23}\sigma_{31}\sigma_{32}$ ein Schnittpunkt von C_3 mit C'_3 ist, wie aus beiden Formen ersichtlich.

Die Koefficienten c, d, γ, δ sind bestimmt durch

$$\left.\begin{matrix} d \\ \delta \end{matrix}\right\} = \frac{-(\sigma_{22} + \sigma_{11}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\sigma_{12}^2}}{2\sigma_{12}}$$

$$\left.\begin{matrix} c \\ \gamma \end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{33} \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{33})^2 - 4\sigma_{13}^2}}{2\sigma_{12}}$$

und noch weiter verknüpft durch die Relation

$$\sigma_{12}\sigma_{23}(\gamma d + c\delta) = -\sigma_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

Von den Vorzeichen der Wurzeln in c, γ, d, δ gilt: Das Vorzeichen einer der beiden Wurzeln, etwa in d oder δ, ist beliebig; denn C'_3 geht aus C_3 hervor, wenn man γ statt c und δ statt d setzt, d. h. jedesmal das Vorzeichen wechselt. Dann ist nur mehr das Vorzeichen von c willkürlich, jenes in γ dadurch bestimmt. Die Bedingung des Zerfallens von C_6 geht damit über in

$$\left|\begin{matrix} (\sigma_{11} + \sigma_{33})(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{33})^2 - 4\sigma_{13}^2} \\ \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 - 4\sigma_{12}^2} \end{matrix}\right| \sigma_{23} = 2\sigma_{12}\sigma_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

rationalisiert und umgeformt

$$\sigma_{23}\,\sigma_{11}{}^2\,(S_{12}\,\sigma_{13}+S_{13}\,\sigma_{12})+\sigma_{22}{}^2\,\sigma_{13}\,(S_{23}\,\sigma_{12}+S_{12}\,\sigma_{23})$$
$$+\sigma_{33}{}^2\,\sigma_{12}\,(S_{13}\,\sigma_{23}+S_{23}\,\sigma_{13})-2\,\sigma_{12}\,\sigma_{13}\,\sigma_{23}\cdot S+2\,S_{12}\,S_{13}\,S_{23}=0,$$

wenn S_{ik} und S Unterdeterminante bezw. Determinante von $|\sigma_{11}\,\sigma_{22}\,\sigma_{33}|$ ist.

Ist der feste Kegelschnitt nur Ordnungskegelschnitt, also $u_\sigma{}^2$ die Linienkoordinatengleichung zu $s_x{}^2$, so wird $S_{ik}=s_{ik}\,\sigma$, wenn σ die Determinante $|s_{11}\,s_{22}\,s_{33}|$, und $S=\sigma^2$. Damit wird dann die Bedingungsgleichung für das Zerfallen

$$\sigma\,[\sigma_{11}{}^2\,\sigma_{23}\,(s_{12}\,\sigma_{13}+s_{13}\,\sigma_{12})+\sigma_{22}{}^2\,\sigma_{13}\,(s_{23}\,\sigma_{12}+s_{12}\,\sigma_{23})$$
$$+\sigma_{33}{}^2\,\sigma_{12}\,(s_{13}\,\sigma_{23}+s_{23}\,\sigma_{13})]-2\,\sigma^2\cdot\sigma_{12}\,\sigma_{13}\,\sigma_{23}+2\,\sigma^3\cdot s_{12}\,s_{13}\,s_{23}=0.$$

m) Für den Fall: S ein Punktpaar, ist diese Bedingung erfüllt, wenn dieses Punktpaar auf dem nämlichen Kegelschnitt V_λ liegt: dann gilt nämlich, falls $P_1=c_1\,|\,c_2\,|\,c_3$ und $P_2=e_1\,|\,e_2\,|\,e_3$

$$\lambda_1\,(c_1{}^2-c_3{}^2)+\lambda_2\,(c_2{}^2-c_3{}^2)=0$$
$$\lambda_1\,(e_1{}^2-e_3{}^2)+\lambda_2\,(e_2{}^2-e_3{}^2)=0,$$

so daß, wenn bezeichnet

$$\gamma_1=c_2{}^2-c_3{}^2,\qquad \varepsilon_1=e_2{}^2-e_3{}^2,$$
$$\gamma_2=c_3{}^2-c_1{}^2,\qquad \varepsilon_2=e_3{}^2-e_1{}^2,$$
$$\gamma_3=c_1{}^2-c_2{}^2,\qquad \varepsilon_3=e_1{}^2-e_2{}^2,$$

gilt

$$(\gamma\,\varepsilon)_1=0,\ (\gamma\,\varepsilon)_2=0,\ (\gamma\,\varepsilon)_3=0.$$

Die Einführung der Werte γ_i, ε_i macht

$$\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2-4\,\sigma_{12}{}^2}=\sqrt{\gamma_3\,\varepsilon_3}$$
$$\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{33})^2-4\,\sigma_{13}{}^2}=\sqrt{\gamma_2\,\varepsilon_2}$$
$$\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2-4\,\sigma_{12}{}^2}\,\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{33})^2-4\,\sigma_{13}{}^2}\ \text{zu}\ \sqrt{\gamma_2{}^2\,\varepsilon_3{}^2}=\gamma_2\,\varepsilon_3$$

und die verlangte Bedingung des Zerfallens von C_6, nämlich

$$[(\sigma_{11}+\sigma_{33})\,(\sigma_{11}+\sigma_{22})\pm\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{33})^2-4\,\sigma_{13}{}^2}$$
$$\sqrt{(\sigma_{11}+\sigma_{22})^2-4\,\sigma_{12}{}^2}\,]\,\sigma_{23}=2\,\sigma_{12}\,\sigma_{13}\,(\sigma_{22}+\sigma_{33})$$

tatsächlich wahr (für die Wahl des einen Vorzeichens).

Der vorliegende Fall ist die projektive Erweiterung des

von Sylvester zuerst untersuchten Spezialfalles der Brennpunktskurve, des Falles nämlich, daß die vier Grundpunkte A_i auf einem Kreis liegen. Im Cayley'schen Sinn ist der das Punktpaar P_1, P_2 enthaltende Büschelkegelschnitt V_λ wie im Fall e) als „Kreis" anzusehen, der zu den schon bekannten Schnittpunkten u_1, u_2, u_3, f_1, f_2, f_3, P_1 und P_2 von C_3 und C'_3 noch hinzutretende $D = \sigma_{12}\,\sigma_{13} \mid \sigma_{21}\,\sigma_{23} \mid \sigma_{31}\,\sigma_{32}$ wieder als „Mittelpunkt" dieses Kreises. Sylvester fand, daß sich unter der Voraussetzung, die vier Punkte A_i liegen auf einem Kreis, die Brennpunktskurve in zwei Kurven dritter Ordnung auflöst. Die projektive Erweiterung der Sylvester'schen Annahme dahin, daß an Stelle der unendlich fernen Kreispunkte zwei beliebige Punkte treten, läßt also diese Eigenschaft bestehen, zugleich mit derjenigen, daß sich diese beiden Kurven dritter Ordnung auch noch im „Höhenschnittpunkt" des Polardreiecks schneiden.

n) Die Bedingung, $P_1\,P_2$ geht durch einen der Eckpunkte u_i, läßt C_6 ausarten; geometrisch ist das daraus ersichtlich, daß die Gerade $P_1\,P_2$ die Ortskurve in sieben Punkten schneiden würde, nämlich in den Doppelpunkten P_1, P_2, u_i und dem Berührungspunkt der zweiten „Parabel" des Büschels — der Berührungspunkt der ersten ist ja u_i. C_6 zerfällt in die Gerade $P_1\,P_2$ und eine Kurve fünfter Ordnung. Analytisch ergibt sich diese Einsicht ebenso leicht: S_j wie S_k müssen in ein Geradenpaar ausarten, da drei ihrer Punkte, P_1, P_2 und u_i immer auf einer Geraden liegen.

$$S_j = (c\,e\,x)\cdot(x\,f_k\,f_i),$$
$$S_k = (c\,e\,x)\cdot(x\,f_i\,f_j)$$

bis auf einen Zahlenfaktor, so daß

$$C_6 = (c\,e\,x)\cdot C_5.$$

o) Liegen die Punkte P_1 und P_2 auf einer Seite des Polardreiecks, etwa auf der x_1 Achse, so wird sich der vorige Fall noch weiter spezialisieren. Jedenfalls muß die x_1 Achse einen Teil des Ortes bilden. Sei unter der angegebenen Annahme $P_1 = 0 \mid c_2 \mid c_3$, $P_2 = 0 \mid e_2 \mid e_3$, also $\sigma_{11} = 0$, $\sigma_{12} = 0$, $\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{22} = 2\,c_2\,e_2$, $\sigma_{23} = c_2\,e_3 + c_3\,e_2$, $\sigma_{33} = 2\,c_3\,e_3$, so wird

$$S_1 = \sigma_{23}\, x_1^2$$
$$S_2 = -\sigma_{23}\, x_1 x_2 + \sigma_{22}\, x_1 x_3$$
$$S_3 = -\sigma_{23}\, x_1 x_3 + \sigma_{33}\, x_1 x_2 ,$$

also

$$C_6 = x_1^2\, C_4 .$$

p) Liegen die beiden Punkte P_1 und P_2 noch konjugiert zu den Ecken u_2 und u_3, so werden ihre Koordinaten $0 | c_2 | c_3$ bezw. $0 | -c_2 | c_3$, so daß $\sigma_{23} = 0$ und damit $C_6 = x_1^2 x_2^2 x_3^2 \sigma_{22} \sigma_{33}$ wird, also in die doppelt zählenden Seiten des Polardreiecks ausartet. Im Cayley'schen Sinn stehen hier x_2 und x_3 zueinander „senkrecht".

q) Rücken die beiden Punkte P_1 und P_2 ins Unendliche, so ist eine Spezialisierung der Ortskurve nicht zu erwarten im projektiven Sinn ist der angegebene Fall ja auch keine Spezialisierung des Punktpaares. Aber es lassen sich im Vorhinein die Asymptoten der Kurve geometrisch bestimmen, und zwar durch die beiden wirklichen Parabeln des Büschels, in die jetzt die „Parabeln" im Cayley'schen des allgemeinen Falles h) übergehen. Entsprechend den dortigen Folgerungen sind jetzt die Kurventangenten in P_1 und P_2, das sind vier der gesuchten Asymptoten, da P_1 und P_2 unendlich ferne Doppelpunkte, als Tangenten an die beiden Parabeln bestimmt. Die Berührungspunkte dieser Parabeln mit $P_1 P_2$ müssen aber selbst Kurvenpunkte sein, so daß die restierenden Asymptoten als Parallele der Achsen dieser Parabeln auftreten.

r) Sind diese beiden unendlich fernen Punkte P_1 und P_2 speziell die unendlich fernen Kreispunkte, so geht die Ortskurve in die eigentliche Brennpunktskurve des Büschels $V + \lambda V'$ über. Nach dem Vorhergehenden sind die Asymptoten derselben bestimmt als die von beiden Punkten aus an die beiden Parabeln des Büschels gelegten Tangenten, sowie als die Achsen-Parallelen der beiden Parabeln. Die ersten vier werden stets imaginär sein; sie sind definiert als die von den Brennpunkten der beiden Parabeln aus nach den unendlich fernen Kreispunkten gehenden Richtungen (da sich ja die von den unendlich fernen Kreispunkten aus an irgend einen Kegelschnitt

der Ebene gezogenen Tangentenpaare in den Brennpunkten desselben schneiden). Naturgemäß erhalten die bisher aufgestellten projektiven Sätze jetzt eine metrische Bedeutung; die Einführung der Cayley'schen Sprechweise des allgemeinen Falles gestattet aber die Beibehaltung des bisherigen Wortlautes.

s) Der Fall: S ein Doppelpunkt, macht so recht darauf aufmerksam, daß S als Kurve zweiter Klasse und nicht als solche zweiter Ordnung anzusehen ist. Es wird im folgenden nachgewiesen, daß die Ortskurve, im Fall S ein Geradenpaar durch P ist, vollständig unabhängig von den beiden Geraden durch P und nur abhängig von diesem Punkte selbst ist: S ist als zusammenfallendes Punktpaar, d. h. als Klassenkurve zu betrachten. Im voraus weiß man bereits, daß C_6 in zwei Kurven dritter Ordnung $C_3 \cdot C'_3$ zerfallen muß, da die Bedingung erfüllt ist, daß P_1 und P_2, hier der Doppelpunkt P, auf dem nämlichen Kegelschnitt V_λ liegen. Die eine Kurve C'_3 muß dabei ein Geradentripel sein, da der vorliegende Fall als Spezialisierung von n) anzusehen ist, also

$$C'_3 = H_1 H_2 H_3, \qquad H_i = (x\, d\, u_i),$$

wenn P die Koordinaten $d_1 \mid d_2 \mid d_3$ hat. Auch geometrisch läßt sich sofort einsehen, daß die von P aus nach den Ecken u_i gezogenen Geraden H_i die Ortsbedingung erfüllen, also Teile der Ortskurve sein müssen. Die andere Kurve C_3 gibt gleichzeitig die bekannte Lösung der Aufgabe: Wenn man von einem Punkt P aus die Tangenten an alle Kurven eines Büschels zieht, so liegen die Berührpunkte auf einer Kurve $(2n-1)$ter Ordnung, welche durch P und die n^2 Grundpunkte des Büschels geht. C_6 zerfällt also in das Tripel H_1, H_2, H_3 und eine Kurve dritter Ordnung C_3. Die Doppelpunkte u_i, f_i werden jetzt die Schnittpunkte der H_i mit C_3.

Analytisch ergibt sich das Zerfallen von C_6 folgendermaßen: Da S_i durch die Punkte u_j, u_k, f_j, f_k und den Doppelpunkt P hindurchgehen muß, u_j, f_j und P aber auf einer Geraden liegen, auf H_j, ebenso wie u_k, f_k und P auf H_k, zerfällt S_i und wird $S_i = H_j H_k$. H_i, H_j und H_k sind die „Höhen" des Polardreiecks.

Damit wird dann

$$C_6 = H_1 H_2 H_3 [H_1 x_1 x_2 + H_2 x_3 x_1 + H_3 x_1 x_2].$$

Ist das den Doppelpunkt P bestimmende Geradenpaar $s_x^2 = c_x e_x$, so werden die Koordinaten von P $d_1 = (c\,e)_1$, $d_2 = (c\,e)_2$, $d_3 = (c\,e)_3$ und H_i bis auf einen Zahlenfaktor

$$H_i = (x\,u_i\,d) = (x\,d)_i.$$

t) Liegt P auf der Verbindungsgeraden zweier Grundpunkte, A_1 und A_2 etwa, so muß die Kurve C_3 des vorigen Falles nochmal zerfallen. Denn C_3 würde die Gerade $A_1 A_2$ in mehr als drei Punkten schneiden: in A_1, A_2, P und der auf $A_1 A_2$ liegenden Ecke u_i. Analytisch ergibt sich das nach leichter Berechnung. Es wird P die Koordinaten haben $P = d_1 | d_1 | d_3$, wenn $A_1 A_2$ durch u_3 geht. Dann wird

$$H_1 = x_2 d_3 - x_3 d_1, \quad H_2 = x_3 d_1 - x_1 d_3, \quad H_3 = d_1 (x_1 - x_2)$$

und bis auf einen Zahlenfaktor

$$C_3 = H_3 \cdot [d_1 x_1 x_2 - d_3 x_1 x_3 - d_3 x_2 x_3 + d_1 x_3^2].$$

u) Liegt P auf einem der Grundpunkte A_i selbst, so wird, was geometrisch und analytisch ohne weiteres ersichtlich, auch $C_3 = H_1 H_2 H_3$, also

$$C_6 = H_1^2 \cdot H_2^2 \cdot H_3^2.$$

v) Wird S eine Doppelgerade, die Klassengleichung also identisch verschwinden, so wird auch C_6 identisch Null.

Anhang.

Die graphische Darstellung der Ortskurve für eine Reihe von Spezialfällen ermöglicht sich einmal durch die Angabe einer Reihe von Sätzen sowohl allgemeiner als spezieller Bedeutung. Es sei erinnert an die acht dreifachen Tangenten, gegeben durch die von den vier Grundpunkten A_i ausgehenden Tangenten an S; an die speziellen Sätze über Doppelpunkte usw. Von Vorteil ist noch die Angabe von zwölf Tangenten der Kurve nebst ihren Berührungspunkten durch die sechs S berührenden Kegelschnitte des Büschels. Im gemeinsamen Berührungspunkt nämlich von S und V_λ fallen zwei der vier möglichen Tangenten zusammen und schneiden auf jeder der beiden andern einen nur in Richtung der letzteren doppelt zählenden Punkt aus, d. h. dieselben berühren die Ortskurve je in einem solchen Punkt.

Einwandsfrei läßt sich die Darstellung der Kurve natürlich nur auf analytischem Weg ermöglichen, etwa durch eine Parameterdarstellung. Man erhält diese, indem man die sechs Schnittpunkte der beiden Kegelschnitten V_λ und S gemeinsamen Tangenten paarweise als die zerfallenden Elemente der durch V_λ und S bestimmten Schar betrachtet und darstellt. In Punktkoordinaten sind die Gleichungen des festen bezw. variablen Kegelschnitts

$$S = s_x^2 = \Sigma s_{ik} x_i x_k ,$$

$$V_\lambda = V + \lambda V' = x_1^2 \quad x_3^2 - \lambda (x_2^2 - x_3^2) ,$$

wenn man den Punkt A_1 als Einheitspunkt wählt, ihm also die Koordinaten $1|1|1$ gibt, in Linienkoordinaten demnach

$$\Sigma = u_\sigma^2 = \Sigma \sigma_{ik} u_i u_k = 0 ,$$

$$\Phi = u_1^2 - \frac{u_2^2}{\lambda} + \frac{u_3^2}{\lambda - 1} = 0 .$$

Die Gleichung der durch Σ und Φ bestimmten Schar ist damit

$$\Sigma - \varrho\,\Phi = 0$$

oder

$$u_1^2(\sigma_{11}-\varrho) + 2\sigma_{12}u_1u_2 + u_2^2\left(\sigma_{22}+\frac{\varrho}{\lambda}\right) + 2\sigma_{13}u_1u_3 + 2\sigma_{23}u_2u_3 + u_3^2\left(\sigma_{33}-\frac{\varrho}{\lambda\text{-}1}\right) = 0.$$

Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\varrho & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}+\frac{\varrho}{\lambda} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\frac{\varrho}{\lambda\text{-}1} \end{vmatrix} = 0$$

stellt die erwähnte Gleichung die drei Schnittpunktspaare der V_λ und S gemeinsamen Tangenten dar. Für jede der drei Wurzeln der vorstehenden Determinantengleichung, aufgelöst

$$\varrho^3 + b\varrho^2 + c\varrho + d = 0$$

erhält man ein Punktpaar von der Form

$$u_1^2(\sigma_{11}-\varrho) + 2\sigma_{12}u_1u_2 + u_2^2\left(\sigma_{22}+\frac{\varrho}{\lambda}\right) + 2\sigma_{13}u_1u_3 + 2\sigma_{23}u_2u_3 + u_3^2\left(\sigma_{33}-\frac{\varrho}{\lambda\text{-}1}\right) = 0$$

oder zerlegt

$$(u_1x'_1 + u_2x'_2 + u_3x'_3)(u_1x''_1 + u_2x''_2 + u_3x''_3) = 0.$$

Die Identität beider Gleichungen ermöglicht die Angabe der Koordinaten eines jeden der beiden Punkte x′ und x″[1]) in der Form

$$\mu x'_1 = \sigma_{31} + \sqrt{\sigma_{31}^2 - (\sigma_{11}-\varrho)\left(\sigma_{33}-\frac{\varrho}{\lambda\text{-}1}\right)}$$

$$\mu x'_2 = \sigma_{32} - \sqrt{\sigma_{32}^2 - \left(\sigma_{22}+\frac{\varrho}{\lambda}\right)\left(\sigma_{33}-\frac{\varrho}{\lambda\text{-}1}\right)}$$

$$\mu x'_3 = \sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda\text{-}1}$$

---

[1]) Clebsch-Lindemann S. 104.

(45) bezw.

$$\mu x''_1 = \sigma_{31} - \sqrt{\sigma_{31}^2 - (\sigma_{11} - \varrho)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x''_2 = \sigma_{32} + \sqrt{\sigma_{32}^2 - \left(\sigma_{22} + \frac{\varrho}{\lambda}\right)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x''_3 = \sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1},$$

wo dann ϱ noch der Bedingung

$$\varrho^3 + b\varrho^2 + c\varrho + d = 0,$$

d. i. der oben angeführten Determinantengleichung genügen muß. In dieser ist

$$b = -\sigma_{11} + \lambda\sigma_{22} - (\lambda - 1)\sigma_{33},$$

$$c = \lambda(\lambda - 1)\left[-S_{11} + \frac{S_{22}}{\lambda} - \frac{S_{33}}{\lambda - 1}\right],$$

$$d = \lambda(\lambda - 1)\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix};$$

S_{ii} sind die Unterdeterminanten zu σ_{ii} der letzten Determinante. Solange S nicht als Klassenkurve ausartet, läßt sich auch schreiben

$$c = \lambda(\lambda - 1)\sigma\left[-s_{11} + \frac{s_{22}}{\lambda} - \frac{s_{33}}{\lambda - 1}\right]$$

$$d = \lambda(\lambda - 1)\sigma^2,$$

wenn $\sigma = |s_{11}\, s_{22}\, s_{33}|$.

Bezüglich der graphischen Darstellung sei noch bemerkt, daß mit I, II, III die Ecken u_1, u_2, u_3 des Polardreiecks bezeichnet werden, mit 1, 2, 3, 4 die vier Grundpunkte A_i, mit a, b, c die Doppelpunkte f_1, f_2, f_3 und mit G_1, G_2, G_3 die Polaren zu I, II, III für S.

Figuren 11 und 12 stellen für den nämlichen Kegelschnitt

$$S = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 5x_1x_3 - 2x_2x_3 + 12x_3^2 = 0$$

erstere die drei Kegelschnitte S_i, letztere die Ortskurve vor. Von den sechs Doppelpunkten sind zwei isolierte Punkte.

Figur 13 entsteht durch die Wahl

$$S = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3 + 8x_3^2 = 0.$$

Alle sechs Doppelpunkte sind eigentliche.

Figur 14 gibt die Ortskurve für die Annahme

$$S = 10x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2 - 14x_1x_3 - 4x_2x_3 + 12x_3^2 = 0,$$

d. h. S geht durch den Punkt $1\,|\,1\,|\,1$. Die Tangente in ihm $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ ist auch Tangente für den Büschelkegelschnitt $V_{\lambda=-2} = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 = 0$. Schnittpunkte der S und V_λ gemeinsamen Tangenten sind einmal die beiden neu auftretenden Doppelpunkte D_1, D_2, die den Werten $\varrho_1 = 60$, $\varrho_2 = 60$ der Parametergleichung zugewiesen sind, ferner zwei Punkte für den Wert $\varrho_3 = -6$. Die beiden Punkte D_1, D_2 allein sind isolierte Doppelpunkte.

Geht S durch zwei der Punkte A_i, so artet die Ortskurve aus $C_6 = C_2 \cdot C_1$. Das ergibt sich daraus, daß die Gleichung $\varrho^3 + b\varrho^2 + c\varrho + d = 0$, deren Koeffizienten b, c, d Funktionen von λ sind, im vorliegenden Fall eine Wurzel unabhängig von λ hat,

$$\varrho_1 = \frac{\sigma}{s_{11}} = -[(s_{22} + s_{23})^2 + \sigma_{33}]$$

wie durch Einsetzen in diese Gleichung sofort zu erweisen ist. Für diesen konstanten Wert von ϱ liefert dann die Parameterdarstellung

$$\mu x_1 = \sigma_{31} \underset{(-)}{+} \sqrt{\sigma_{31}^2 - (\sigma_{11} - \varrho)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_2 = \sigma_{32} \underset{(+)}{-} \sqrt{\sigma_{32}^2 - \left(\sigma_{22} + \frac{\varrho}{\lambda}\right)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_3 = \sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}$$

einen Kegelschnitt.

Für den Fall

$$S = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_1x_3 - 11x_2x_3 + 6x_3^2 = 0;$$

d. i. S geht durch $A_1 = 1\,|\,1\,|\,1$ und $A_2 = -1\,|\,1\,|\,1$, findet die

Ortskurve in Figur 15 ihre Darstellung. Für jeden Wert von λ existiert die Gleichung $\varrho^3 + b\varrho^2 + c\varrho + d = 0$, hier

$$(\varrho + 45)\,[\varrho^2 + 24\,\varrho\,(\lambda + 1) + 720\,\lambda\,(\lambda - 1)] = 0,$$

die also eine von λ unabhängige Wurzel $\varrho_1 = -45$ und die beiden andern $\varrho_{2,3} = -12\,[\lambda + 1 \pm \sqrt{1 + 7\lambda - 4\lambda^2}]$ liefert. Für die Werte $\lambda_1 = 1,882\,787\,5$, $\lambda_2 = -0,132\,787\,5$, die $\varrho_2 = \varrho_3$ machen, erhält man die beiden Doppelpunktspaare einmal auf der Tangente in A_1, das andere Mal auf jener in A_2. Dem ersten Wert $\varrho_1 = -45$ entspricht die Kurve

$$\mu x_1 = -10 \underset{(-)}{+} \sqrt{100 + 4\left(20 + \frac{45}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_2 = 40 \underset{(+)}{-} \sqrt{1600 - \left(44 - \frac{45}{\lambda}\right)\left(20 + \frac{45}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_3 = 20 + \frac{45}{\lambda - 1}$$

d. i. ein Kegelschnitt. Die Beseitigung von λ liefert ihn in der gewöhnlichen Darstellung mit

$$C_2 = 20\,x_1^2 + 5\,x_1 x_2 + x_1 x_3 - 2\,x_2 x_3 = 0.$$

Die von A_3 und A_4 aus an S gelegten Tangentenpaare, dreifache Tangenten für C_6, sind einfache für C_2. Die Kurve vierter Ordnung C_4 hat I und a als Doppelpunkte, die übrigen Doppelpunkte von C_6 sind Schnittpunkte von C_2 mit C_4.

Auch der Fall: S geht durch drei Punkte A_i, soll hier noch etwas ausgeführt werden. Wie im vorigen Fall wird die jedem Parameter λ zugeordnete Gleichung $\varrho^3 + b\varrho^2 + c\varrho + d = 0$ zunächst eine von λ unabhängige Wurzel $\frac{\sigma}{s_{11}}$ liefern und damit genau wie dort einen Kegelschnitt bestimmen. Die beiden andern Wurzeln obiger Gleichung genügen dann den Koeffizientenbeziehungen

$$-(\varrho_2 + \varrho_3) = b + \frac{\sigma}{s_{11}}$$

$$\varrho_2\,\varrho_3 = -d\,\frac{s_{11}}{\sigma},$$

also der Gleichung

$$\varrho^2 + \left(b + \frac{\sigma}{s_{11}}\right)\varrho + d\,\frac{s_{11}}{\sigma} = 0,$$

und es ergeben sich damit (unter Benützung der Bedingung, daß A_1, A_2, A_3 auf S liegen, bezw. den daraus gefolgerten Koeffizientenbeziehungen in S) zu

$$\varrho_2 = s_{11}\,s_{22}\,(\lambda - 1), \qquad \varrho_3 = -\,s_{11}\,s_{33}\,\lambda, \qquad \varrho_1 = s_{22}\,s_{33},$$

da $\sigma = s_{11}\,s_{22}\,s_{33}$.

Dann erhält man die drei Kegelschnitte: für $\varrho_1 = s_{22}\,s_{33}$

$$C_2 = x_1^2\,(s_{11} + s_{12}) + x_1\,x_2\,(s_{12} + s_{22}) + x_1\,x_3\,(s_{11} + s_{12} + s_{22}) + s_{12}\,x_2\,x_3 = 0;$$

für $\varrho_2 = s_{11}\,s_{22}\,(\lambda - 1)$

$$C'_2 = s_{12}\,x_1\,x_2 - x_1\,x_3\,(s_{11} + s_{12}) + x_2\,x_3\,(s_{12} + s_{22}) - x_3^2\,(s_{11} + s_{12} + s_{22}) = 0;$$

für $\varrho_3 = -\,s_{11}\,s_{33}\,\lambda$

$$C''_2 = x_1 x_2\,(s_{11} + s_{12}) + x_2^2\,(s_{12} + s_{22}) - s_{12}\,x_1\,x_3 - x_2\,x_3\,(s_{11} + s_{12} + s_{22}) = 0.$$

Diese in drei Kegelschnitte zerfallende Ortskurve findet in Fig. 16 ihre Darstellung. Gegeben ist

$$S = 2\,x_1^2 - x_1\,x_2 + x_2^2 + x_1\,x_3 - x_2\,x_3 - 2\,x_3^2 = 0.$$

Für jeden Wert λ hat die Gleichung $\varrho^3 + b\,\varrho^2 + c\,\varrho + d = 0$ die Wurzeln

$$\varrho_1 = -\,8, \qquad \varrho_2 = 8\,(\lambda - 1), \qquad \varrho_3 = 16\,\lambda.$$

Die drei entstehenden Kegelschnitte sind

$$\begin{aligned} 3\,x_1^2 + x_1\,x_2 + 5\,x_1\,x_3 - x_2\,x_3 &= 0,\\ x_1 x_2 + 3\,x_1\,x_3 - x_2\,x_3 + 5\,x_3^2 &= 0,\\ x_2^2 + 3\,x_1\,x_2 + x_1\,x_3 - 5\,x_2\,x_3 &= 0. \end{aligned}$$

In Fig. 17 ist angenommen

$$S = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2 + 4\,x_2^2 - 6\,x_1\,x_3 - 6\,x_2\,x_3 + 8\,x_3^2 = 0,$$

so daß $\sigma_{23} = 0$, d. h. x_2 ist „senkrecht“ zu x_3. Die sechs Doppelpunkte haben dann die Koordinaten $I = 1\,|\,0\,|\,0$, $II = 0\,|\,1\,|\,0$, $III = 0\,|\,0\,|\,1$, $a = 0\,|\,\sigma_{12}\,|\,\sigma_{13}$, $b = \sigma_{12}\,|\,0\,|\,0$, $c = \sigma_{13}\,|\,0\,|\,0$. Es

fallen also b, c, I zusammen und bilden dadurch den dreifachen Punkt. Die Ortskurve berührt in I die beiden Polardreieckseiten.

Auch $s_{ik} = 0$, mit $s_{jk} = 0$ soll noch etwas ausgeführt werden. Ist etwa $s_{13} = 0$, $s_{23} = 0$, so ergibt die Parameterform zu jedem Wert λ die Wurzel $\varrho_1 = \sigma_{33}\,(\lambda - 1)$ der Gleichung $\varrho^3 + b\,\varrho^2 + c\,\varrho + d = 0$, während die beiden andern Wurzeln bestimmt sind durch

$$\varrho^2 + s_{33}\,(s_{11}\,\lambda - s_{22})\,\varrho - s_{33}^2\,\sigma_{33}\,\lambda = 0.$$

$\varrho_1 = \sigma_{33}\,(\lambda - 1)$ ergibt die doppelt zählende Gerade $x_3 = 0$, während die Kurve vierter Ordnung C_4 bestimmt ist durch

$$\mu x_1 = \underset{(-)}{+} \sqrt{-(\sigma_{11} - \varrho)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_2 = \underset{(+)}{-} \sqrt{-\left(\sigma_{22} + \frac{\varrho}{\lambda}\right)\left(\sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}\right)}$$

$$\mu x_3 = \sigma_{33} - \frac{\varrho}{\lambda - 1}.$$

Fig. 18 gibt das Bild der Kurve für den Fall

$$S = x_1^2 - 2\,x_2\,x_3 + 12\,x_3^2 = 0;$$

hier ist $s_{12} = s_{13} = 0$, daneben noch $s_{22} = 0$.

Artet S in ein Punktpaar aus, so wird die Parameterdarstellung sich erheblich vereinfachen. Im allgemeinsten Fall waren die Koordinaten des Ortspunktes gegeben durch Glg. 46, wobei ϱ der Gleichung $\varrho^3 + b\,\varrho^2 + c\,\varrho + d = 0$ genügen muß. Diese vereinfacht sich jetzt wegen $d = 0$ zu $\varrho\,(\varrho^2 + b\,\varrho + c) = 0$; $\varrho_1 = 0$ gibt das Punktpaar P_1, P_2; $\varrho_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ die Ortskurve, wobei

$$b = -\sigma_{11} + \lambda\,\sigma_{22} - (\lambda - 1)\,\sigma_{33}$$

$$c = \lambda\,(\lambda - 1)\left[-S_{11} + \frac{S_{22}}{\lambda} - \frac{S_{33}}{\lambda - 1}\right].$$

$b^2 - 4c$ ist in λ quadratisch; durch passende Substitution eines neuen Parameters ν wird sich $\sqrt{b^2 - 4c}$, also auch ϱ als rationale Funktion von ν darstellen lassen, und damit schließlich x_i als hyperelliptische Funktion von ν, was hier nur angedeutet werden soll.

Fig. 19 gibt für die Wahl $P_1 = -5{,}39 \mid 2{,}08 \mid 1$ und $P_2 = -4{,}31 \mid 3{,}74 \mid 1$ die Ortskurve. Die P_i wurden gewählt als die Berührpunkte der von III aus an den Kegelschnitt S der Fig. 12 gezogenen Tangenten, um zu veranschaulichen, wie beim Zerfallen jenes Kegelschnitts in das Punktpaar die Ortskurve die beiden neuen Doppelpunkte gewinnt.

Die Annahme $P_1 P_2$ geht durch A_1, findet ihre Darstellung durch Fig. 20; P_1 und P_2 haben die Koordinaten $4 \mid -2 \mid 1$ bezw. $-3 \mid 5 \mid 1$, die Gerade $P_1 P_2$ also die Gleichung $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, die in A_1 berührende doppelt zu zählende „Parabel“ $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 0$. P_1 und P_2 sind Rückkehrpunkte.

Das Zerfallen der Ortskurve in $C_6 = C_3 \cdot C'_3$ zeigt Fig. 21, wo $P_1 = \sqrt{5} \mid 2\sqrt{2} \mid \sqrt{2}$ und $P_2 = -\sqrt{5} \mid 3 \mid 1$ gewählt wurden, also so, daß sie auf dem nämlichen Kegelschnitt $V_\lambda = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ liegen. Der neue Doppelpunkt von C_6, der neunte Schnittpunkt von C_3 mit C'_3, ist dann der „Mittelpunkt“ des „Kreises“ V_λ.

Die Wahl $P_1 = 0 \mid 5 \mid 1$, $P_2 = 0 \mid 6 \mid 1$, also beide auf der x_1 Achse, die ein Zerfallen von C_6 in C_4 und die doppelt zählende x_1 Achse bewirkt, findet in Fig. 22 ihre Darstellung.

Die Annahme $P_1 = -2 \mid -3 \mid 1$ und $P_2 = -4 \mid -2 \mid 1$, d. i. beide Punkte auf der unendlich fernen Geraden, findet ihren Ausdruck in Fig. 23.

Fig. 24 gibt die Kurve graphisch wieder, wenn

$$S = c_x\, e_x = (x_1 - 4x_2 + 16x_3)(3x_1 + 2x_2 - 36x_3) = 0.$$

Der Doppelpunkt P hat die Koordinaten $8 \mid 6 \mid 1$.

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.

Lebenslauf.

Der Verfasser, Christof Anton Heinz Egerer, ist geboren am 29. März 1874 zu Nürnberg. Seine Eltern sind die verstorbenen Wagnerseheleute Josef und Franziska Egerer, geborene Ernstberger; er ist katholischer Konfession und bayrischer Staatsangehörigkeit. Verfasser besuchte sieben Jahre die Volksschule in Nürnberg und neun Jahre das humanistische Gymnasium (Nürnberg, Bamberg, Nürnberg, Münnerstadt). Vom Jahre 1895 an widmete er sich teils an der Universität, teils an der technischen Hochschule in München dem Studium der Mathematik und Physik, der Naturwissenschaften und der Technik. Im Jahre 1898 unterzog er sich dem ersten, 1900 dem zweiten Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik, 1901 dem ersten, 1904 dem zweiten Abschnitt der Diplomprüfung für Maschineningenieure. Vom Jahre 1900 bis zum Jahre 1902 war Verfasser zeitweise der Reihe nach an der Maria Theresia-Kreisrealschule, am Ludwigsgymnasium und an der Industrieschule in München als Assistent für Mathematik und Physik tätig. Seitdem betreibt der Verfasser Privatstudien

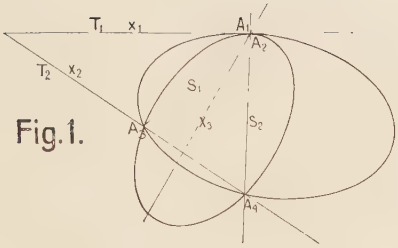


Fig.1.

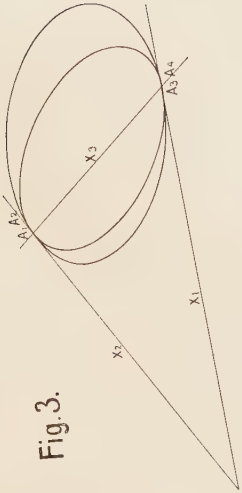


Fig.3.

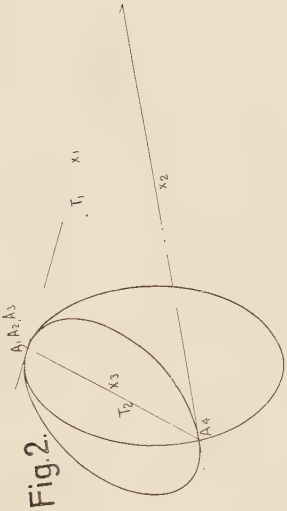
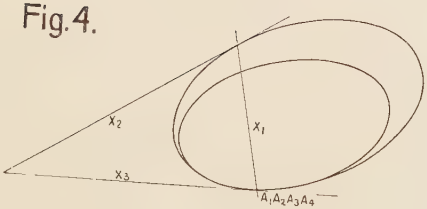


Fig.2.

Fig.4.



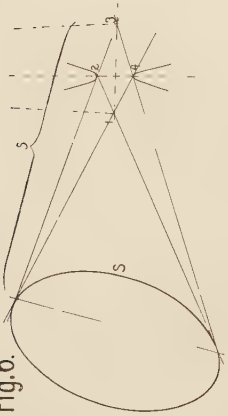


Fig.6.

Fig.5.

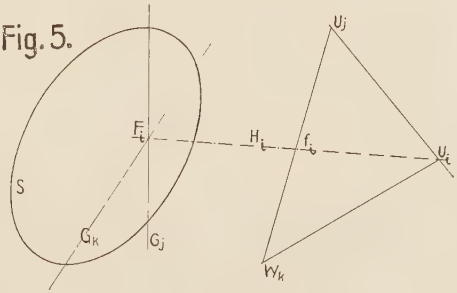


Fig. 7.

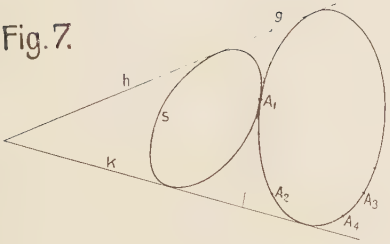


Fig. 9.

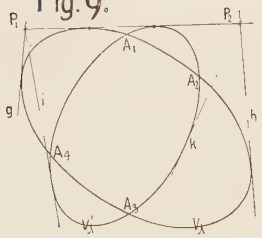


Fig. 8.

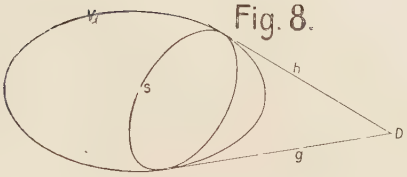


Fig. 11.

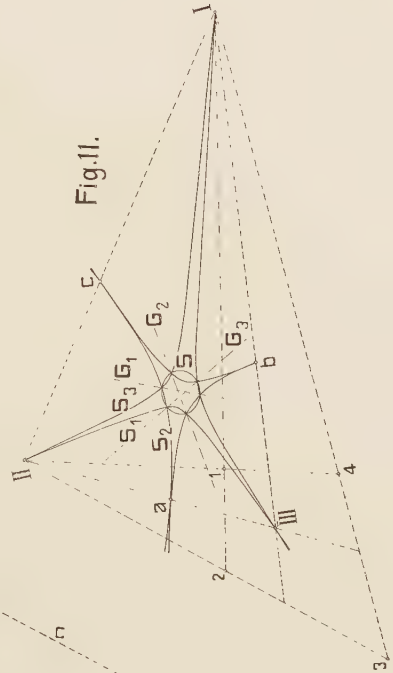


Fig. 10.

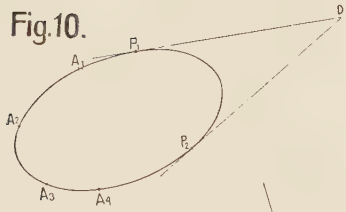
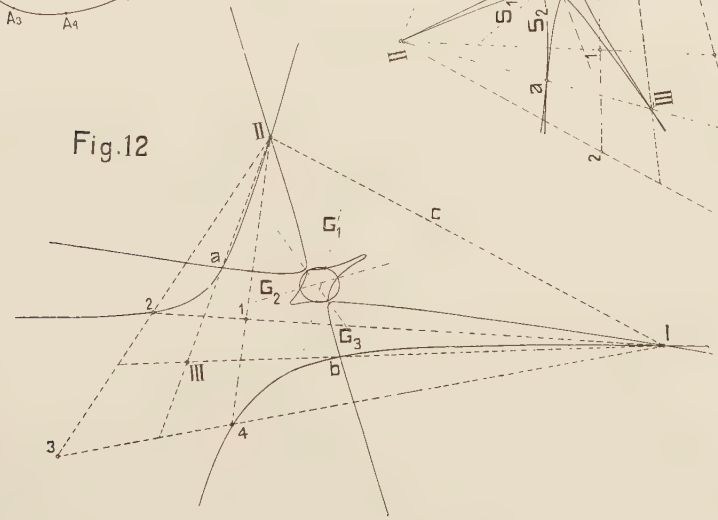


Fig. 12



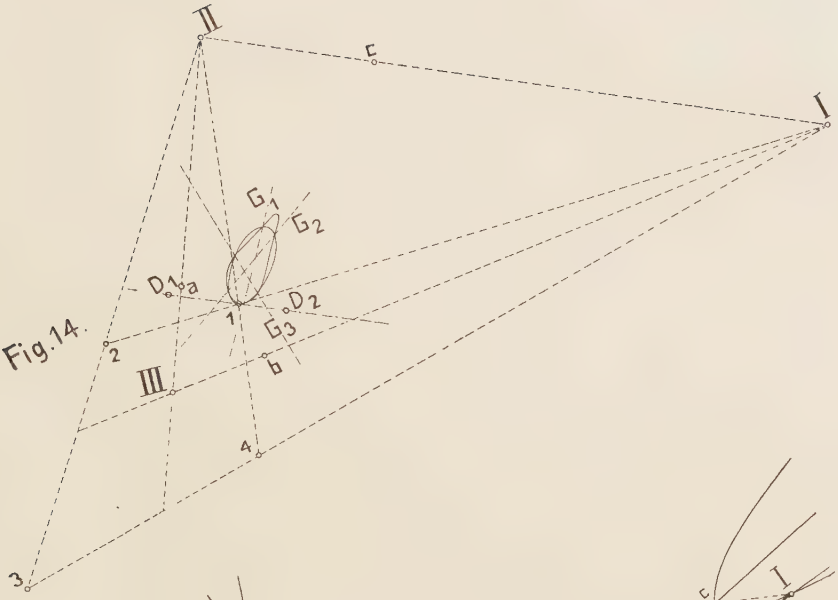


Fig.14.

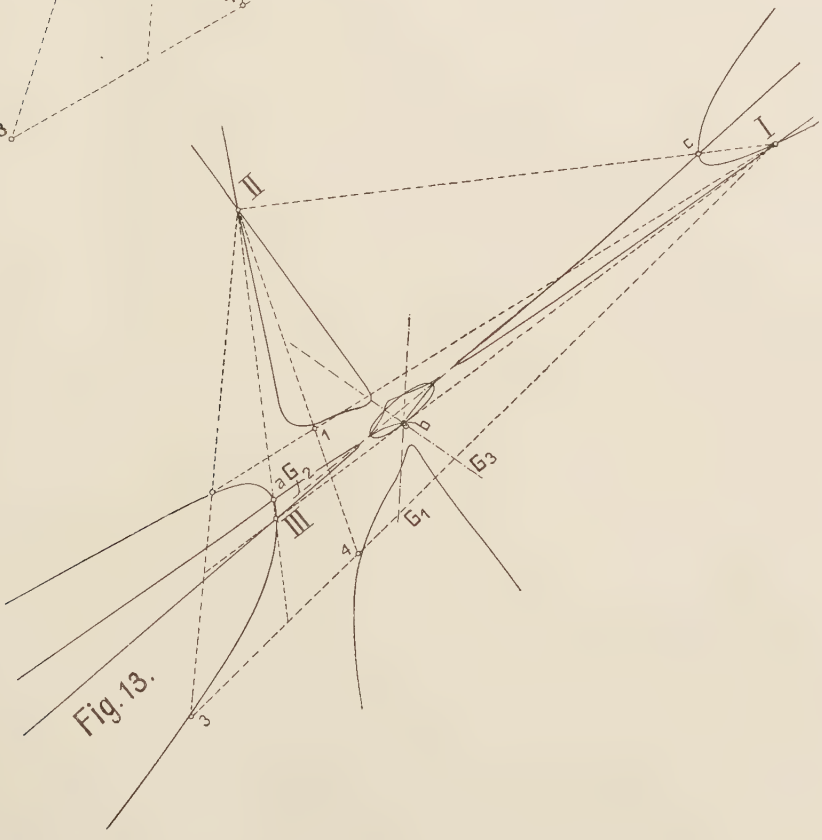


Fig.13.

Fig.15.

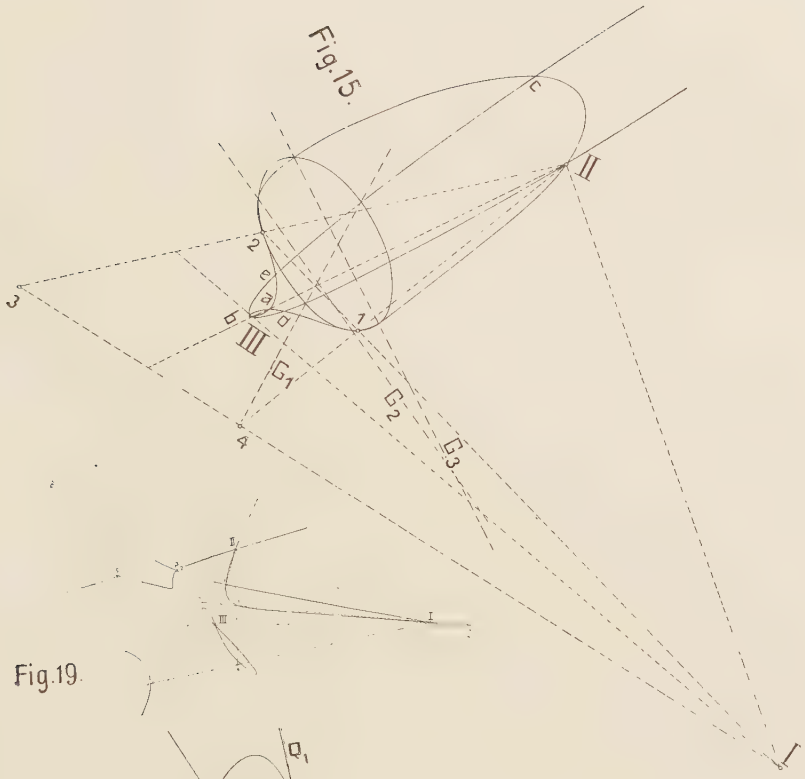


Fig.19.

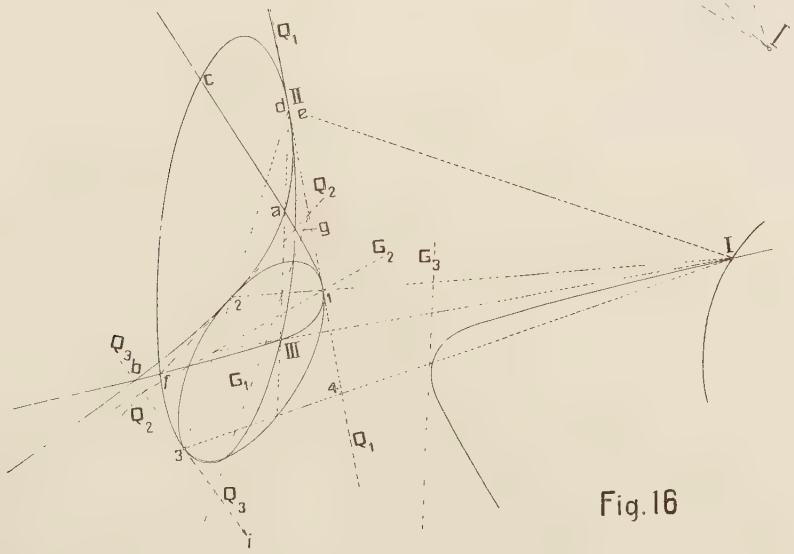


Fig.16

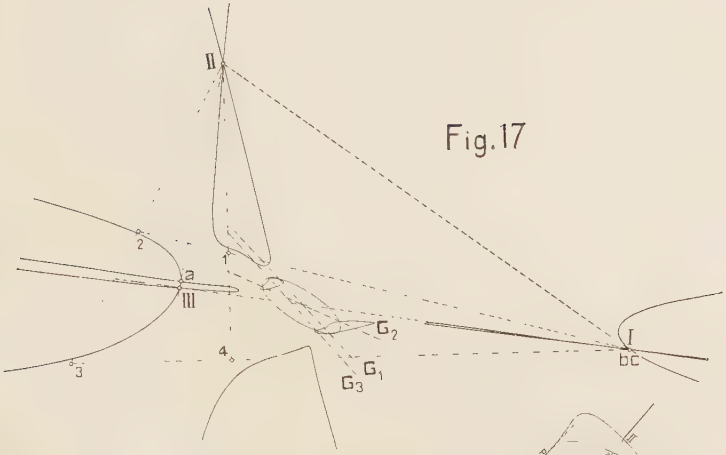


Fig.17

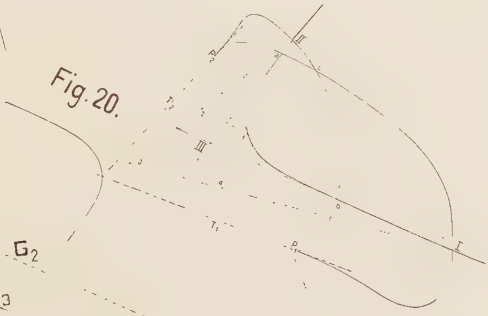
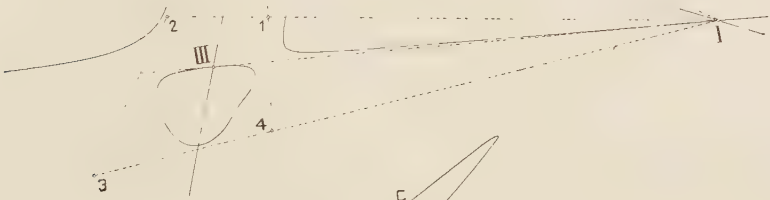


Fig.20.

Fig.18



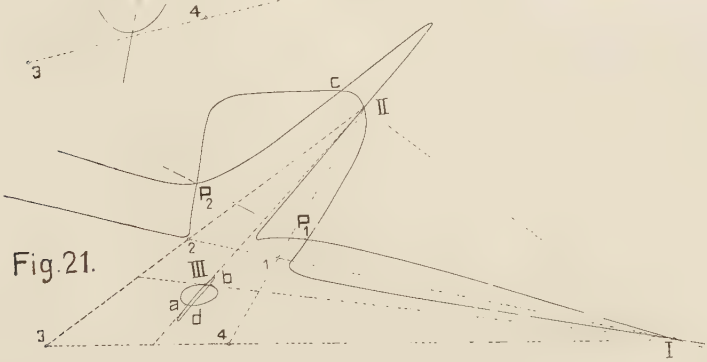


Fig.21.

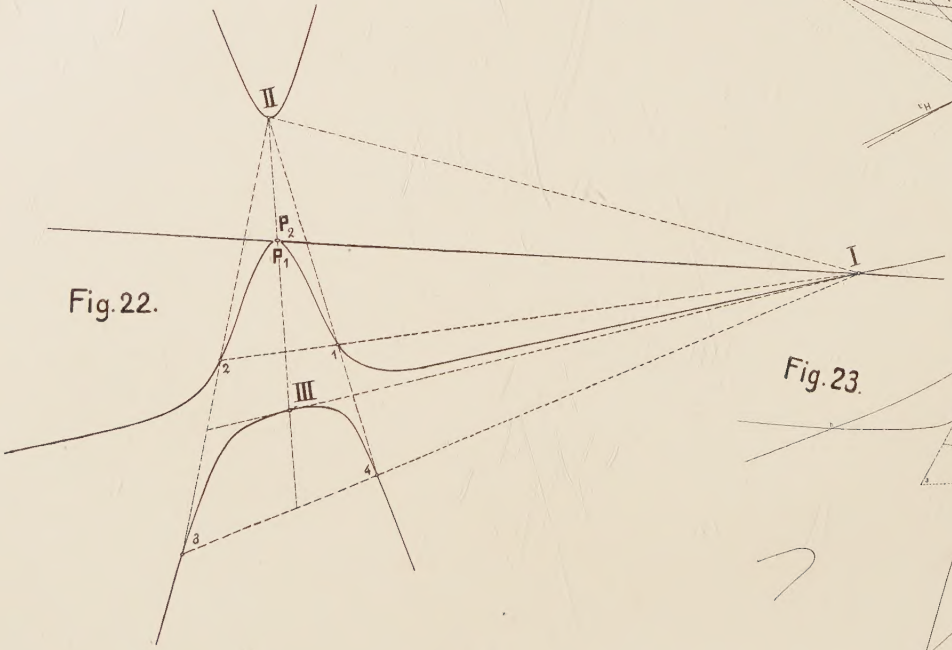


Fig. 22.

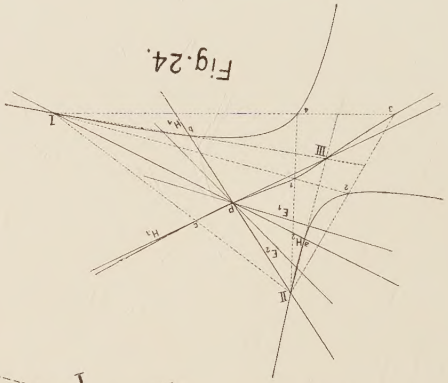


Fig. 24.

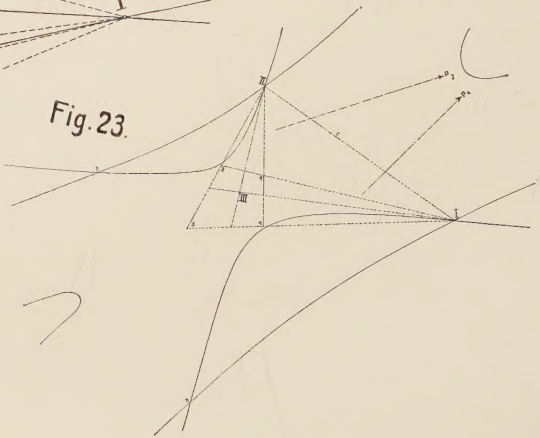


Fig. 23.